应用随机过程引论

胡迪鹤

中国科学院科学基金资助的课题

哈尔滨工业大学出版社

51.716
386

应用随机过程引论

胡 迪 鹤

哈尔滨工业大学出版社

8710001

内 容 简 介

本书用简单的数学工具和通俗的语言，论述在实际中应用较广的几类随机过程。诸如随机徘徊、分枝过程、泊松过程，更新过程、马尔可夫过程、平稳过程和鞅过程。凡学过微积分和初等概率论的读者，均可阅读此书。

本书可供理科、工科、财经、师范院校的高年级大学生、研究生和教师参考；亦可供有关的科技工作者参考。

?2? 6?

应用随机过程引论

胡 迪 鹤

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

黑龙江省教育厅印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 10,375 字数 250,000

1984年12月第1版 1984年12月第1次印刷

印数 1—10,000

书号 13341·2 定价 1.80元

序　　言

随机过程论，是现代概率论中一个重要课题，国内外已有大量专著及教材论及它。但是，在国内，使用较浅的数学工具且适用面较广的随机过程论教材很缺。特别是，既能作为数学系大学生选修课教材，又能作为工科院校、师范院校及财经院校有关研究生课程使用的随机过程论教材更少。正因为如此，作者把近年来给工科院校、师范院校及财经院校的有关研究生及进修教师讲授的“应用随机过程引论”整理成此书。凡学过初等概率论及微积分的读者，基本上可自学此书。

本书主要包括：随机徘徊、分枝过程、生灭过程、更新过程、排队过程、可数状态的马氏过程、平稳过程及鞅过程。本书只对上述诸随机过程作些简单介绍，更深刻的理论，不可能涉及，但论证却力求精确。

赵达纲副教授对本书提出过许多宝贵意见，谨此致谢。

限于作者学识浅薄，缺点错误在所难免，敬请读者不吝指教。

胡　迪　鹤

1984年于武汉大学

目　　录

§1 随机徘徊

本书是在初等概率论的基础上写的。假定读者已学过初等概率论，因此，对初等概率论中一些基本概念及术语，不再解释。例如：试验、事件、随机变量、分布、密度函数、分布函数、特征函数、期望（均值）和方差……等等。

我们使用的一些主要符号，都是一般概率论教材中常用的。例如：$P(A)$表示事件A的概率，$P(A|B)$表示事件A对事件B的条件概率，$A\subset B$（或$B\supset A$）表示事件A含于B（或事件B包含事件A），$A=B$表示事件A、B相等，$A\cap B$、$A\cup B$、$A-B$表示事件A与B的交、并、差，有时亦用$P(A,B)$表示$P(A\cap B)$，即表示A与B之交的概率，而用$P(A$或$B)$表示$P(A\cup B)$，即表示A与B之并的概率。若X是一个随机变量，则用$\mathbf{E}(X)$和$\mathrm{Var}(X)$表示X的期望与方差，……等等。

下面我们开始研究这一节的主题——随机徘徊。

随机徘徊，是一类直观意义很强的重要的随机过程。由于本书只对随机过程作些简略介绍，所以本节对随机徘徊，也只介绍一些直线上的整数格子点上的随机徘徊的基本知识。

这类随机徘徊，直观上可描述如下：设有一质点在直线上的整数格子点上运动，每隔一个单位时间运动一次，每次运动的长度为一整数。若在时刻n质点处于位置i，则在时

8710001

刻 $n+1$，处于位置 j 的概率为 $p_{i,j}\equiv p_{0,j-i}$不依赖 n 和起始位置 i，只依赖运动的长度$j-i$，此处 $p_{0,k}\geqslant 0,(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$，$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{0,k}=1$。若令 X_n为时刻 n 该质点所处的位置，$(n\geqslant 0)$，则$\{X_n,n\geqslant 0\}$描述了该质点的运动轨道。通常称$\{X_n,n\geqslant 0\}$为直线上整数格子点$\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$上的随机徘徊。

根据这一直观描述，很自然地会给出其数学定义如下：

定义1·1. 设 $\{\xi_n,n\geqslant 1\}$ 为一串相互独立的具有下列公共分布的随机变量

$$P(\xi_n=k)=p_k \quad (n\geqslant 1,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$p_k\geqslant 0 \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k=1$$

令

$$X_n=X_0+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n, \quad (n\geqslant 1)$$

X_0为该质点的初始位置，X_0亦为整值随机变量，且与$\{\xi_n\}$独立，则称 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 为直线上整数格子点上的随机徘徊。令 $p_{i,j}(n)=P(X_{n+1}=j|X_n=i)$，由定义知 $p_{i,j}(n)$ 不依赖 n 和 i 而只依赖 $j-i$，故可记 $p_{i,j}(n)$ 为 $p_{i,j}$，这时有 $p_{i,j}=p_{j-i}$ 称 $p_{i,j}$ 为 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的转移概率。

特别地，若直线上整数格子点上的随机徘徊 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的转移概率$p_{i,j}$满足

$$p_{i,j}=\begin{cases} p & j=i+1 \\ q & j=i-1 \\ 0 & |j-i|\neq 1 \end{cases} \tag{1·1}$$

$p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$，$p+q=1$，则称 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 为贝努利（Ber-

noulli）随机徘徊。更特别地，若贝努利随机徘徊中的 $p=q=\frac{1}{2}$，则称此贝努利随机徘徊为对称的贝努利随机徘徊或简单随机徘徊。

为什么把满足（1·1）的随机徘徊称为贝努利随机徘徊呢？因为若 $\{\sigma_n, n\geqslant 0\}$ 是一串贝努利试验，即 $\{\sigma_n, n\geqslant 0\}$ 是一串相互独立的试验，每次试验恰有两个结果，不妨说是"成功"和"失败"。假定每次试验出现"成功"的概率为 p，出现"失败"的概率为 $q=1-p$，令

$$X_n=X_0+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n \quad (n\geqslant 1),\ X_0\equiv 0$$

$$\xi_n=\begin{cases} 1 & \text{当第 } n \text{ 次试验出现"成功"} \\ -1 & \text{当第 } n \text{ 次试验出现"失败"} \end{cases}$$

则 X_n 代表前 n 次试验中成功多于失败的次数，$\{X_n, n\geqslant 0\}$ 就是一个贝努利随机徘徊。

设 $p_{i,j}$ 是直线上整数格子点上的随机徘徊 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的转移概率。记 $I=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$

$$\begin{cases} p_{i,j}^{(0)}=\delta_{i,j}=\begin{cases} 1 & \text{当 } i=j \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } i\neq j \text{ 时} \end{cases} \\ p_{i,j}^{(1)}=p_{i,j} \\ p_{i,j}^{(n)}=\sum\limits_{\substack{i_1=-\infty \\ \vdots \\ i_{n-1}=-\infty}}^{\infty} p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j} \end{cases} \qquad (1\cdot 2)$$

则有

命题1·1. 对任意 $i,j\in I$，有

$$p_{i,j}^{(n+m)}=\sum_{k\in I} p_{i,k}^{(n)}p_{k,j}^{(m)} \quad (n\geqslant 0,\ m\geqslant 0) \qquad (1\cdot 3)$$

$$\sum_{j\in I} p_{i,j}^{(n)}=1 \quad (n\geqslant 0) \tag{1·4}$$

$$p_{i,j}^{(n)}=p_{0,j-i}^{(n)} \quad (n\geqslant 0) \tag{1·5}$$

证。由于 $p_{s,t}^{(l)}\geqslant 0$，$(l\geqslant 0,\ s,t\in I)$，所以由（1·2），并应用有限重的正项级数可交换求和次序的法则可得

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{(n+m)} &= \sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}\sum_{k\in I}\sum_{j_1\in I}\cdots\sum_{j_{m-1}\in I} \\
&\quad p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},k}p_{k,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{m-1},j} \\
&= \sum_{k\in I}\sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}\sum_{j_1\in I}\cdots\sum_{j_{m-1}\in I} \\
&\quad p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},k}p_{k,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{m-1},j} \\
&= \sum_{k\in I}\sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I} p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},k} \\
&\quad \cdot\sum_{j_1\in I}\cdots\sum_{j_{m-1}\in I} p_{k,j_1}p_{j_1,j_2}\cdots p_{j_{m-1},j} \\
&= \sum_{k\in I} p_{i,k}^{(n)}p_{k,j}^{(m)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I} p_{i,j}^{(n)} &= \sum_{j\in I}\sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I} p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j} \\
&= \sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I} p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-2},i_{n-1}}\sum_{j\in I} p_{i_{n-1},j} \\
&= \sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I} p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-2},i_{n-1}} \\
&= \cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$=\sum_{i_1\in I}p_{i,i_1}$$

$$=1$$

显然（1·5）对 $n=0$ 和 $n=1$ 成立。设（1·5）对$n=k$成立，则由

$$p_{i,j}^{(k+1)}=\sum_{t\in I}p_{i,t}^{(k)}p_{t,j}^{(1)}$$

$$=\sum_{t\in I}p_{0,t-i}^{(k)}\,p_{t-i,j-i}^{(1)}$$

$$=\sum_{s\in I}p_{0,s}^{(k)}p_{s,j-i}^{(1)}$$

$$=p_{0,j-i}^{(k+1)}$$

归纳法完成，所以（1·5）对一切 $i,j\in I$，$n\geqslant0$皆成立。

定义1·2． 设 $\{X_n,n\geqslant0\}$ 是直线上的整数格子点上的随机徘徊，$I=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$p_{i,j}$ $(i,j\in I)$ 是其转移概率，令

$$f_{i,j}^{(0)}=0\quad(i,\ j\in I)$$

$$f_{i,j}^{(1)}=p_{i,j}^{(1)}=p_{i,j}\quad(i,\ j\in I)$$

$$f_{i,j}^{(n)}=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\ \sum_{i_2\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}$$

$$p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j}$$

$(n\geqslant2,\ i,j\in I)$ $\{j\}$ 表示恰含 j 的单点集合，称$f_{i,j}^{(n)}$为 $\{Xn,n\geqslant0\}$ 的“自 i 出发经 n 步初达 j”的转移概

率。

由 $f_{i,j}^{(n)}$的定义及条件概率的计算可得

$$P(X_{m+1}\neq j,\cdots,X_{m+n-1}\neq j,X_{m+n}=j|X_m=i)$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}P(X_{m+1}=i_1,\cdots,X_{m+n-1}=i_{n-1},$$

$$X_{m+n}=j|X_m=i)$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}P(X_{m+n}=j|X_{m+n-1}=i_{n-1},\cdots,$$

$$X_{m+1}=i_1,X_m=i)\cdot P(X_{m+n-1}=i_{n-1},X_{m+n-2}$$

$$=i_{n-2},\cdots,X_{m+1}=i_1|X_m=i)$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}P(X_{m+n}=j|X_{m+n-1}=i_{n-1})$$

$$\cdot P(X_{m+n-1}=i_{n-1},X_{m+n-2}=i_{n-2},\cdots,X_{m+1}$$

$$=i_1|X_m=i)$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}p_{i_{n-1},j}\cdot P(X_{m+n-1}=i_{n-1},X_{m+n-2}$$

$$=i_{n-2},\cdots,X_{m+1}=i_1|X_m=i)$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\sum_{i_1\in I-\{j\}}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}}p_{i,i_1}p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j}=f_{i,j}^{(n)}$$

而上式左端的直观的概率意义正是：随机徘徊 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ “自 i 出发经 n 步初达 j ”的转移概率。仿之可证 $p_{i,j}^{(n)}=P(X_{n+m}=j|X_m=i)$，故 $p_{i,j}^{(n)}$的直观意义是“自 i 出发经

n 步到达 j ” 的概率。

命题1·2． 对任何 $n\geqslant 1$，i，$j\in I$，有

（1） $f_{i,j}^{(n)}=f_{0,j-i}^{(n)}$

（2） $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)}\leqslant 1$

（3） $p_{i,j}^{(n)}=\sum\limits_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)} p_{j,j}^{(n-k)}$

证．（1） 由 $f_{i,j}^{(n)}$的定义及 $p_{i,j}^{(k)}=p_{0,j-i}^{(k)}$ $(k\geqslant 0, i, j\in I)$ 可得

$$
\begin{aligned}
f_{i,j}^{(n)} &= \sum_{i_1\in I-\{j\}} \cdots \sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}} p_{i,i_1} p_{i_1,i_2}\cdots p_{i_{n-1},j} \\
&= \sum_{i_1\in I-\{j\}} \cdots \sum_{i_{n-1}\in I-\{j\}} p_{0,i_1-i} p_{i_1-i,i_2-i}\cdots p_{i_{n-1}-i,j-i} \\
&= \sum_{s_1\in I-\{j-i\}} \cdots \sum_{s_{n-1}\in I-\{j-i\}} p_{0,s_1} p_{s_1,s_2}\cdots p_{s_{n-1},j-i} \\
&= f_{0,j-i}^{(n)}
\end{aligned}
$$

（2）从概率的观点上看，（2）式显然成立。因为前面已经证明：

$$f_{i,j}^{(k)}=P(X_{m+1}\neq j,\cdots, X_{m+k-1}\neq j, X_{m+k}=j\,|\,X_m=i)$$

若令

$$A_j(m,k)=\{X_{m+1}\neq j,\cdots, X_{m+k-1}\neq j, X_{m+k}=j\}$$
$$(1\leqslant k\leqslant n)$$

则 $A_j(m,1)$，$A_j(m,2),\cdots$，$A_j(m,n)$是两两互斥的事件。

因此若令 $B_j(m, n)=\bigcup_{k=1}^{n} A_j(m,k)$，则有

$$1\geqslant P(B_j(m, n)|X_m=i)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_j(m, k)|X_m=i\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} P(A_j(m,k)|X_m=i)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f_{i,j}^{(k)}$$

（2）获证。

（3）下面对 n 作归纳法来证明（3）。当 $n=1$ 时，$f_{i,j}^{(1)}\ p_{j,j}^{(0)}=f_{i,j}^{(1)}=p_{i,j}^{(1)}$，此即（3）对$n=1$成立。设（3）对 $n=k$ 成立，往证（3）对 $n=k+1$ 亦成立。事实上，由命题1·1及归纳法假设有

$$p_{i,j}^{(k+1)}=\sum_{t\in I} p_{i,t}p_{t,j}^{(k)}=\sum_{t\in I} p_{i,t}\sum_{s=1}^{k} f_{t,j}^{(s)}p_{j,j}^{(k-s)}$$

但是，由定义1·2有

$$\sum_{t\in I-\{j\}} p_{i,t}f_{t,j}^{(s)}=f_{i,j}^{(s+1)}$$

以此式代入前式并再一次应用归纳法假设有

$$p_{i,j}^{(k+1)}=\sum_{s=1}^{k}\ \sum_{t\in I} p_{i,t}f_{t,j}^{(s)}p_{j,j}^{(k-s)}$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\left(\sum_{t\in I-\{j\}} p_{i,t}f_{t,j}^{(s)}+p_{i,j}f_{j,j}^{(s)}\right)p_{j,j}^{(k-s)}$$

$$=\sum_{s=1}^{k}\left(f_{i,j}^{(s+1)}+p_{i,j}f_{j,j}^{(s)}\right)p_{j,j}^{(k-s)}$$

$$=\sum_{m=2}^{k+1}(f_{i,j}^{(m)}\ p_{j,j}^{(k+1-m)})+p_{i,j}p_{j,j}^{(k)}$$

$$=\sum_{m=2}^{k+1}f_{i,j}^{(m)}p_{j,j}^{(k+1-m)}+f_{i,j}^{(1)}p_{j,j}^{(k)}$$

$$=\sum_{m=1}^{k+1}f_{i,j}^{(m)}p_{j,j}^{(k+1-m)}$$

此即（3）对 $n=k+1$ 亦成立。命题证毕。

定义1·3. 设 $f_{i,j}^{(n)}$、$p_{i,j}^{(n)}$如前所定义，令

$$g_{i,j}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}p_{i,j}^{(k)}\qquad(n=0,1,\cdots,\ i,j\in I)$$

$$g_{i,j}^{*}=\sum_{k=0}^{\infty}p_{i,j}^{(k)}\qquad(i,j\in I)$$

$$g^{(n)}=g_{0,0}^{(n)}\qquad(n=0,1,\cdots)$$

$$g^{*}=g_{0,0}^{*}$$

$$f_{i,j}^{*}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,j}^{(n)}\qquad(i,j\in I)$$

$$f^{(n)}=f_{0,0}^{(n)}\qquad(n=0,1,\cdots)$$

$$f^*=f^*_{0,0}$$

上述诸量皆具有明显的概率意义。$g^{(n)}_{i,j}$的概率意义是：随机徘徊从 i 出发，到时刻 n 为止，曾在 j 逗留过的总次数的平均值；$g^*_{i,j}$的概率意义是：随机徘徊从 i 出发，在整个过程中，曾在 j 逗留过的总次数的平均值；$f^{(n)}_{i,j}$是随机徘徊从i出发，恰巧在时刻 n 初达 j 的概率；$f^*_{i,j}$是随机徘徊从i出发，在整个过程中总要到达 j 的概率。

命题1·3． 对定义1·3中定义的诸量，有下列关系

（1）$g^{(n)}_{i,j}\leqslant g^{(n)}_{0,0}$ （对一切 $n\geqslant 0$, $i,j\in I$）

（2）$g^*=\dfrac{1}{1-f^*}$ $\left(约定\dfrac{1}{0}=\infty\right)$

证。（1）由命题1·1有

$$p^{(k)}_{i,j}=p^{(k)}_{0,j-i}=p^{(k)}_{i-j,0} \qquad (k\geqslant 0,\ i,j\in I)$$

所以由 $g^{(n)}_{i,j}$的定义有

$$g^{(n)}_{i,j}=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}_{i,j}=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}_{i-j,0}=g^{(n)}_{i-j,0}$$

因此，为了证明（1）对一切 $i,j\in I$ 成立，只须证明(1)对 $j=0$, $i\neq 0$ 成立。用命题1·2 (3) 有

$$g^{(n)}_{i,0}=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}_{i,0}=\sum_{k=1}^{n}p^{(k)}_{i,0}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=0}^{k}f^{(k-t)}_{i,0}\ p^{(t)}_{0,0}$$

上式第二个等式用了 $i \neq 0$，$p_{i,0}^{(0)}=\delta_{i,0}=0$，上式第三个等式用了命题1·2（3）。把上式交换求和次序可得

$$g_{i,0}^{(n)}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n} f_{i,0}^{(k-l)}\ p_{0,0}^{(l)}$$

$$=\sum_{l=0}^{n} p_{0,0}^{(l)}\sum_{m=0}^{n-l} f_{i,0}^{(m)}$$

而由命题1·2（2）有

$$\sum_{m=0}^{n-l} f_{i,0}^{(m)}\leqslant 1$$

所以

$$g_{i,0}^{(n)}\leqslant\sum_{l=0}^{n} p_{0,0}^{(l)}=g_{0,0}^{(n)}$$

（1）证毕。

（2）由命题1·2（3）有

$$p_{0,0}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f_{0,0}^{(k)} p_{0,0}^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{n} f_{0,0}^{(k)} p_{0,0}^{(n-k)} \qquad (n\geqslant 1)$$

（因为 $f_{i,j}^{(0)}=0$）

把上式两边对 n 从1到 m 求和后两边再加1得

$$g^{(m)}=\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} f_{0,0}^{(k)} p_{0,0}^{(n-k)}+1$$

$$=\sum_{k=0}^{m} f_{0,0}^{(k)} \sum_{n=k}^{m} p_{0,0}^{(n-k)} +1$$

$$=\sum_{k=0}^{m} f_{0,0}^{(k)} g_{0,0}^{(m-k)} +1$$

$$=\sum_{k=0}^{m} f^{(k)} g^{(m-k)} +1 \quad (m\geqslant 1) \tag{1·6}$$

令 $m\to\infty$ 得

$$g^{*}=1+\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m} f^{(k)} g^{(m-k)}$$

$$\geqslant 1+g^{*}\sum_{k=0}^{N} f^{(k)} \qquad (对一切 N\geqslant 1)$$

因此

$$g^{*}\geqslant 1+g^{*}f^{*} \tag{1·7}$$

这就证明了当 $f^{*}=1$ 时 $g^{*}=\infty$，亦即 $f^{*}=1$ 时（2）成立。

另一方面，由（1·6）有

$$1=g^{(m)}-\sum_{k=0}^{m} f^{(k)} g^{(m-k)} = g^{(m)}-\sum_{k=0}^{m} g^{(k)} f^{(m-k)}$$

$$\geqslant g^{(m)}-g^{(m)}\sum_{k=0}^{m} f^{(m-k)}$$

$$\geq g^{(m)}(1-f^*) \tag{1·8}$$

上式中第一个不等式用到了$g^{(m)}$对m而言单调非降，第二个不等式用到了$f^{(n)}\geq 0$，（对一切$n\geq 0$）在（1·8）中令$m\to\infty$得

$$1\geq g^*(1-f^*) \tag{1·9}$$

这就证明当$f^*<1$时，$g^*<\infty$。再用（1·7）、（1·9）即得

$$g^*=\frac{1}{1-f^*} \qquad （当\ f^*<1时）$$

此即$f^*<1$时，（2）也对。命题证毕。

例1·1. 设$\{X_n, n\geq 0\}$是贝努利随机徘徊，即是其转移概率$p_{i,j}$满足（1·1）的随机徘徊。显然

$$p_{0,0}^{(n)}=\begin{cases}0 & 当\ n\ 为奇数\\ C_{\frac{n}{2}}^{n}(pq)^{\frac{n}{2}} & 当\ n\ 为偶数\end{cases} \tag{1·10}$$

其中C_k^m代表从m个元素中取k个的组合数，对于任意实数x，任何正整数k，如常规，定义

$$C_k^x=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

而

$$C_0^x\equiv 1$$

注意：$2^n[1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot(2n-1)]$

$$=2n(2n-1)\cdots(2n-n+1), \tag{1·11}$$

（此式可以对n作归纳法来证明。当$n=1$时，上式左右两边皆为2。设上式对$n=k$成立，则

$$2^{k+1}\{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot[2(k+1)-1]\}$$
$$=2^k[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)]\cdot 2(2k+1)$$
$$=2k(2k-1)\cdots(2k-k+1)\cdot(4k+2)$$

$$=2k(2k-1)\cdots(2k-k+2)[(2k-k+1)(4k+2)]$$
$$=2k(2k-1)\cdots(2k-k+2)[2(k+1)(2k+1)]$$
$$=2(k+1)\cdot(2k+1)2k(2k-1)\cdots(2k-k+2)$$
$$=2(k+1)\cdot(2k+1)2k(2k-1)\cdots[2(k+1)-(k+1)+1]$$

归纳法完成。）

所以

$$C_n^{2n}=\frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!}$$
$$=\frac{2^n[1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)]}{n!}$$
$$=\frac{(-1)^n2^{2n}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$$
$$=(-1)^n2^{2n}C_n^{-\frac{1}{2}}\qquad(n=0,1,\cdots)\qquad(1\cdot12)$$

因此

$$p_{0,0}^{(2n)}=(pq)^nC_n^{2n}=(-1)^n(4pq)^nC_n^{-\frac{1}{2}}\quad(n=0,1,\cdots)$$

从而由 $p_{0,0}^{(k)}=0$（当 k 为奇数）及牛顿（Newton）二项公式可得

$$g^*=\sum_{n=0}^{\infty}p_{0,0}^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{0,0}^{(2n)}$$
$$=\lim_{t\uparrow1}\sum_{n=0}^{\infty}t^np_{0,0}^{(2n)}$$
$$=\lim_{t\uparrow1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4pqt)^nC_n^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{t\uparrow 1}(1-4pqt)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\begin{cases}(1-4pq)^{-\frac{1}{2}} & 当\ p\neq q \\ \infty & 当\ p=q=\frac{1}{2}\end{cases} \tag{1·13}$$

定义1·4. 设 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是任一整数格子点上的随机徘徊。$f^*=\sum_{n=1}^{\infty}f_{0,0}^{(n)}$, $g^*=\sum_{n=1}^{\infty}p_{0,0}^{(n)}$ 如定义1·3所定义。(注意：由命题1·2有 $f^*=\sum_{n=1}^{\infty}f_{0,0}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{i,i}^{(n)}$，$i\in I$，而由随机徘徊的定义有$g^*=\sum_{n=0}^{\infty}p_{0,0}^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,i}^{(n)}$)若 $f^*=1$（由命题1·3，它等价于 $g^*=\infty$），则称 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是常返的，反之，称 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是非常返的（或者称之为滑过的）。

对于例1·1中的贝努利随机徘徊 $\{X_n, n\geqslant 0\}$，它是常返的充要条件为：$p=q=\frac{1}{2}$

随机徘徊是“常返的”的直观意义是很明确的。因为，如定义1·3后面所解释的，$f^*=\sum_{n=1}^{\infty}f_{0,0}^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}f_{i,i}^{(n)}$ 是“由 i 出发在整个过程中总要到达 i ”的概率。因此当此概率$f^*=1$ 时，我们称此随机徘徊是常返的，这是有道理的。

下面我们研究贝努利随机徘徊 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的几个具体问题。

问题甲。设 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是贝努利随机徘徊，且对应的 p 和 q 无一为 0，从 a 出发（即是 $X_0=a$），a 和 b 皆为大于等于 1 的整数，令 $c=a+b$。求该随机徘徊到达 c 以前先到达 0 的概率 p_0。

解　令 u_j 为随机徘徊从 j 出发，到达 c 以前先到达 0 的概率，即是

$$u_j=P\left(\begin{matrix}\text{存在一个 } n\geqslant 0\text{，使 } X_{n+m}=0\\ \text{但 } X_k\neq c\text{，对一切 } n+m>k\geqslant m\end{matrix}\middle| X_m=j\right)$$

$$0\leqslant j\leqslant c$$

由定义立即得边界条件

$$u_0=1 \qquad u_C=0$$

而当 $1\leqslant j\leqslant c-1$ 时，若注意 $X_n=X_0+\xi_1+\cdots+\xi_n$，$(n\geqslant 0)$，$\{X_0, \xi_1, \xi_2, \cdots\}$ 相互独立可得

$$u_j=P\left(\begin{matrix}\xi_{m+1}=1\text{，且存在一个} n\geqslant 0\text{，使 } X_{n+m}=0\\ \text{但 } X_k\neq c\text{，对一切 } n+m>k\geqslant m\end{matrix}\middle| X_m=j\right)$$

$$+P\left(\begin{matrix}\xi_{m+1}=-1\text{，且存在一个} n\geqslant 0\text{，使} X_{n+m}=0\\ \text{但 } X_k\neq c\text{，对一切} n+m>k\geqslant m\end{matrix}\middle| X_m=j\right)$$

$$=P\left(\begin{matrix}\xi_{m+1}=1\text{，且存在一个} n\geqslant 1\text{，使} X_{n+m}=0\\ \text{但} X_k\neq c\text{，对一切} n+m>k\geqslant m+1\end{matrix}\middle| X_m=j\right)$$

$$+P\left(\begin{matrix}\xi_{m+1}=-1\text{，且存在一个} n\geqslant 1\text{，使} X_{n+m}=0\\ \text{但} X_k\neq c\text{，对一切} n+m>k\geqslant m+1\end{matrix}\middle| X_m=j\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= P\left(\begin{matrix}\text{存在一个 } n\geqslant 1\text{，使}X_{n+m}=0\\ \text{但}X_k\neq c\text{，对一切}n+m>k\geqslant m+1\end{matrix}\middle|\, \xi_{m+1}=1,\right.\\
&\left. X_m=j\right)\cdot P(\xi_{m+1}=1\,|\,X_m=j)\\
&+P\left(\begin{matrix}\text{存在一个}n\geqslant 1\text{，使}X_{n+m}=0\\ \text{但}X_k\neq c\text{，对一切}n+m>k\geqslant m+1\end{matrix}\middle|\, \xi_{m+1}=-1,\right.\\
&\left. X_m=j\right)\cdot P(\xi_{m+1}=-1\,|\,X_m=j)\\
&= P\left(\begin{matrix}\text{存在一个}n\geqslant 0\text{，使 }X_{n+m+1}=0\\ \text{但}X_k\neq c\text{，对一切 }n+1+m>k\geqslant m+1\end{matrix}\middle|\, X_{m+1}=j\right.\\
&\left. +1,\ X_m=j\right)\cdot p\\
&+P\left(\begin{matrix}\text{存在一个}n\geqslant 0\text{，使 }X_{n+m+1}=0\\ \text{但}X_k\neq c\text{，对一切 }n+1+m>k\geqslant m+1\end{matrix}\middle|\, X_{m+1}=\right.\\
&\left. j-1,\ X_m=j\right)q\\
&= P\left(\begin{matrix}\text{存在一个}n\geqslant 0\text{，使 }X_{n+m+1}=0\\ \text{但 }X_k\neq c\text{，对一切}n+1+m>k\geqslant m+1\end{matrix}\middle|\, X_{m+1}=j\right.\\
&\left. +1\right)\cdot p\\
&+P\left(\begin{matrix}\text{存在一个}n\geqslant 0\text{，使 }X_{n+m+1}=0\\ \text{但 }X_k\neq c\text{，对一切}n+1+m>k\geqslant m+1\end{matrix}\middle|\, X_{m+1}=\right.\\
&\left. j-1\right)\cdot q\\
&= pu_{j+1}+qu_{j-1}\quad (1\leqslant j\leqslant c-1) \qquad (1\cdot 14)
\end{aligned}
$$

总之，我们得到差分方程组

$$\begin{cases} u_j = pu_{j+1} + qu_{j-1} & 1 \leqslant j \leqslant c-1 \\ u_0 = 1 \quad u_c = 0 \end{cases} \tag{1·15}$$

上面我们经过详细的推导得到方程组（1·14），其实，从概率的直观意义上看，很容易得到（1·14）。因为当 $1 \leqslant j \leqslant c-1$时，一个质点从 j 出发，在到达 c 以前先到达0，可以考虑它第一次运动后的两种可能：（1）以概率 p 向右移一步而达 $j+1$，（2）以概率 q 向左移一步而达 $j-1$。在第（1）种情况下，到达 c 以前到达0的（条件）概率为 u_{j+1}，而在第（2）种情况下，到达 c 以前先到达0的（条件）概率为 u_{j-1}，再用全概率公式立即得到方程组(1·14)。

下面我们来解差分方程组（1·15）。由于 $p+q=1$，所以 $u_j = pu_j + qu_j$，以此代入（1·15）并移项可得知(1·15)等价于

$$\begin{cases} q(u_j - u_{j-1}) = p(u_{j+1} - u_j) & (1 \leqslant j \leqslant c-1) \\ u_0 = 1 \quad u_c = 0 \end{cases} \tag{1·15}'$$

令 $r = q/p$，$d_j = u_j - u_{j+1}$ $(0 \leqslant j \leqslant c-1)$ 则（1.15)′ 又等价于

$$\begin{cases} d_j = rd_{j-1} & (1 \leqslant j \leqslant c-1) \\ u_0 = 1 \quad u_c = 0 \end{cases} \tag{1·15}''$$

由（1·15)″ 得：$d_j = r^j d_0$，故

$$u_j = u_j - u_c = \sum_{k=j}^{c-1} (u_k - u_{k+1})$$

$$= \sum_{k=j}^{c-1} d_k = \sum_{k=j}^{c-1} r^k d_0$$

$$=\begin{cases}\dfrac{r^j-r^c}{1-r}d_0 & (0\leqslant j\leqslant c-1,\ r\neq 1)\\ (c-j)d_0 & (0\leqslant j\leqslant c-1,\ r=1)\end{cases}\tag{1·16}$$

在（1·16）中取 $j=0$ 得

$$1=u_0=\begin{cases}\dfrac{1-r^c}{1-r}d_0 & (\text{当 } r\neq 1)\\ cd_0 & (\text{当 } r\neq 1)\end{cases}\tag{1·17}$$

故

$$d_0=\begin{cases}\dfrac{1-r}{1-r^c} & (\text{当 } r\neq 1)\\ \dfrac{1}{c} & (\text{当 } r=1)\end{cases}\tag{1·18}$$

以（1·18）代入（1·16）得

$$u_j=\begin{cases}\dfrac{r^j-r^c}{1-r^c} & (0\leqslant j\leqslant c-1,\ r\neq 1)\\ \dfrac{c-j}{c} & (0\leqslant j\leqslant c-1,\ r=1)\end{cases}\tag{1·19}$$

显然，当 $j=c$ 时，由 $u_c=0$ 知（1·19）式对 $j=c$ 亦成立，总之

$$u_j=\begin{cases}\dfrac{r^j-r^c}{1-r^c} & (0\leqslant j\leqslant c,\ r\neq 1)\\ \dfrac{c-j}{c} & (0\leqslant j\leqslant c,\ r=1)\end{cases}\tag{1·20}$$

特别地

$$p_0=u_a=\begin{cases}\dfrac{r^a(1-r^b)}{1-r^c} & (\text{当 } r\neq 1)\\ \dfrac{b}{c} & (\text{当 } r=1)\end{cases}\tag{1·21}$$

类似地，我们可以问，问题甲中的随机徘徊，到达 0 以前先到达 c 的概率 p_c 等于多少？是否还须要重复上面的推导呢？当然读者作为练习，不妨试试。但实际上不须重复了。

设想张三与李四两人做游戏，张三开始拥有 a 个筹码，李四拥有 b 个，$a\geqslant 1$，$b\geqslant 1$，$a+b=c$。每次游戏，张三获胜的概率为 p，李四获胜（即张三失败）的概率为 q，$0<p<1$，$p+q=1$，谁获胜一次，则从对方索取一个筹码。这样解释以后，则上面引进的 $r=q/p$ 即是张三的失败与获胜的概率比，u_j 即是已知张三拥有 j 个筹码的条件下最终全部输给李四的概率。若令 $\tilde{r}=\dfrac{1}{r}=p/q$

$$v_j=P\left(\begin{matrix}\text{存在一个}n\geqslant 0\text{，使}X_{n+m}=c\\ \text{但}X_k\neq 0\text{，对一切}n+m>k\geqslant m\end{matrix}\,\middle|\,X_m=j\right)\quad 0\leqslant j\leqslant c$$

则 $\tilde{r}$ 是李四的失败与获胜的概率比，v_j 是已知李四拥有 $c-j$ 个筹码的条件下最终全部输给张三的概率。因此在(1·20)的右方用 $\tilde{r}=\dfrac{1}{r}$ 代 r，用 $c-j$ 代 j 即得 v_j，亦即

$$v_j=\begin{cases}\dfrac{\left(\dfrac{1}{r}\right)^{c-j}-\left(\dfrac{1}{r}\right)^{c}}{1-\left(\dfrac{1}{r}\right)^{c}} & (0\leqslant j\leqslant c,\ r\neq 1)\\[2ex] \dfrac{j}{c} & (0\leqslant j\leqslant c,\ r=1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1-r^j}{1-r^c} & (0\leqslant j\leqslant c,\ r\neq 1)\\[2ex] \dfrac{j}{c} & (0\leqslant j\leqslant c,\ r=1)\end{cases}\qquad(1\cdot 22)$$

特别地

$$p_c = v_a = \begin{cases} \dfrac{1-r^a}{1-r^c} & (r \neq 1) \\ \dfrac{a}{c} & (r=1) \end{cases} \tag{1·23}$$

从（1·20）和（1·22）看出

$$u_j + v_j \equiv 1 \quad (0 \leqslant j \leqslant c) \tag{1·24}$$

总之，我们得到下述定理

定理1·1．设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是一个如问题甲中所定义的随机徘徊，则此随机徘徊迟早要接触边界（它由 0 和 c 两点构成）的概率恒为1。

证．（1·24）式就是此定理的证明。

系1．设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是任何一个贝努利随机徘徊，（不管 p，q 为何值），该随机徘徊永远在一个有界区间内徘徊的概率为 0 。

证．（A）先设 p 和 q 无一为 0 。由定理1·1得知：不论 a，b，（$a+b=c$）为什么正整数，当随机徘徊从 a 出发，它迟早到接触边界（它由 0 和 c 两点构成）的概率恒为 1 。也就是永远在（0，c）内徘徊的概率为 0 。由于 a 和 b 的任意性知此随机徘徊永远在任一有界区间内徘徊的概率为 0 。

（B）设 $p=0$，则此随机徘徊，每徘徊一次，它恒向左移一个长度为 1 的距离，当然，此随机徘徊永远在一个有界区间内徘徊的概率为 0 。

（C）设 $q=0$，则此随机徘徊，每徘徊一次，它恒向右移一个长度为 1 的距离，当然，此随机徘徊永远在一个有界

区间内徘徊的概率为0。系1证毕。

问题乙（击中概率）

设 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是任意一个贝努利随机徘徊，设初始状态 $X_0=a\geqslant 1$。问此随机徘徊迟早要处于位置0的概率是多少？

首先我们分析一下问题乙与问题甲的异同。在问题甲中，假设了 p 和 q 无一为0，而且考虑另一边界点 c，所求的是达 c 以前先达0的概率，而今把"达 c 以前"这一条件去掉了。

关于 p 和 q 无一为0的假定是不足道的。因为当 $p=0$ 时，问题乙中所求之概率显然为1；而当 $q=0$ 时，此概率显然为0。

所以，我们讨论问题乙时，仍设 p 和 q 无一为0。在这一假设下，在问题甲中，我们曾经算出过：由 j 出发，在到达 c 以前到达0的概率为

$$u_j=\begin{cases}\dfrac{r^j-r^c}{1-r^c} & (0\leqslant j\leqslant c,\ r\neq 1)\\[2ex] \dfrac{c-j}{c} & (0\leqslant j\leqslant c,\ r=1)\end{cases}\tag{1·20}$$

其实这里的 u_j 是依赖 c 的，严格地应写 u_j 为 $u_j(c)$。当 $c\to\infty$ 时，

$$\lim_{c\to\infty} u_j(c)$$

就是随机徘徊从 j 出发迟早要处于位置0的概率。在(1·20)中令 $c\to\infty$ 取极限，得

$$\lim_{c\to\infty} u_j(c)=\begin{cases}\lim\limits_{c\to\infty}\dfrac{r^j-r^c}{1-r^c} & (0\leqslant j,\ r\neq 1)\\[2ex] \lim\limits_{c\to\infty}\dfrac{c-j}{c} & (0\leqslant j,\ r=1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases} r^j & (j\geqslant 0,\ r<1) \\ 1 & (j\geqslant 0,\ r\geqslant 1) \end{cases} \tag{1·25}$$

特别地，从 a 出发，迟早要处于位置 0 的概率为

$$\lim_{c\to\infty} u_a(c)=\begin{cases} r^a & (r<1) \\ 1 & (r\geqslant 1) \end{cases} \tag{1·26}$$

注意 $r=q/p$，(1·26) 即为

$$\lim_{c\to\infty} u_a(c)=\begin{cases} (q/p)^a & 当\ q<p \\ 1 & 当\ q\geqslant p \end{cases} \tag{1·27}$$

从问题乙的解答，我们可以推出下列

定理1·2. 设 $\{X_n,\ n\geqslant 0\}$ 是任意一个贝努利随机徘徊，$X_0=k$，k 为任意一个整数，则此随机徘徊迟早要处于位置 $k-a$（a 为任一正整数）的概率为 $(q/p)^a$（当 $q<p$ 时），为 1（当 $q\geqslant p$）。类似地，此随机徘徊迟早要处于位置 $k+a$ 的概率为$\left(\frac{p}{q}\right)^a$（当 $p<q$ 时），为1（当 $p\geqslant q$ 时）。

定理1·3. 设 $\{X_n,\ n\geqslant 0\}$ 是对称的贝努利随机徘徊，即是满足$p=q=\frac{1}{2}$的贝努利随机徘徊。则无论此随机徘徊从何处出发，它处于任一整数 j 上无穷多次的概率为 1 。

注意：在定义 1·4 中曾引进过随机徘徊的"常返性"的概念。所谓随机徘徊 $\{X_n,\ n\geqslant 0\}$ 是常返的，意即 $f^*=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{0,0}^{(n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)}=1$，或等价地，$g^*=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{0,0}^{(n)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)}=\infty$。

而在例1·1中又证明过：对任何贝努利随机徘徊而言，它是常返的充要条件是它对称，即$p=q=\frac{1}{2}$。定理1·3，正好说明常返性的直观概率意义。

现在我们来证明定理1·3。只给出一个直观的证明。记$i\nearrow j$为"由i出发随机徘徊迟早要到达j"这一事件，$i\nearrow j\nearrow j$为"由i出发随机徘徊迟早要最少到达j两次"这一事件，…。由定理1·2，$i\nearrow j$的概率为1，$i\nearrow j\nearrow j$的概率也为1，…，一般地，$i\nearrow j\nearrow j\cdots\nearrow j$（从$i$出发随机徘徊迟早要最少到达$j$ n次）的概率也是1。…，所以无论随机徘徊从何处出发，它处于j上无穷多次的概率为1。

习　　题

1·1. 设$\{X_n, n\geq 0\}$是一个贝努利随机徘徊，$X_0=0$。试求：

(a) $P(X_n\geq 0,\ n=1,2,3,4)$;

(b) $P(X_n<0,\ n=1,2,3,4)$;

(c) $P(X_n\neq 0,\ n=1,2,3,4)$;

(d) $P(X_n\leq 2,\ n=1,2,3,4)$;

(e) $P(|X_n|\leq 2,\ n=1,2,3,4)$.

1·2. 设$\{X_n, n\geq 0\}$是直线上整数格子点上任何一个随机徘徊，试证：对任何正整数n，任何整数i_0，i_1，…，i_n，i_{n+1}，有

(a) $P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n,\ \cdots,\ X_1=i_1,\ X_0=i_0)$
$=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)$;

(b) $P(X_{n+1}=i_{n+1},\ X_{n-1}=i_{n-1}|X_n=i_n)$

$$=P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)P(X_{n-1}=i_{n-1}|X_n=i_n)。$$

1·3. 设 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是直线上的一个贝努利随机徘徊，$X_0=0$，令

$$g_n=f_{0,-1}^{(n)}=P(X_n=-1,\ X_k\neq -1,\ 0<k<n|X_0=0)$$

试证

(a) $G(s)\equiv\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n s^n$满足方程式

$$G(s)=qs+psG^2(s)$$

从而

$$G(s)=\frac{1-(1-4pqs^2)^{\frac{1}{2}}}{2ps}$$

若令 $h_n=f_{0,1}^{(n)}=P(X_n=1,\ X_k\neq 1,\ 0<k<n|X_0=0)$，再证

(b) $H(s)\equiv\sum\limits_{n=0}^{\infty}h_n s^n=\frac{p}{q}\left(\frac{1-(1-4pqs^2)^{\frac{1}{2}}}{2ps}\right)$

1·4. 设 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是直线上整数格子点上任一随机徘徊。令

$$e_{m,n}=g^{(n+m)}-g^{(m)} \qquad (m\geqslant 0,\ n\geqslant 0)$$

其中 $g^{(n)}$之定义如定义1·3，试说明 $e_{m,n}$的概率意义，并证明

$$e_{0,n}\geqslant e_{m,n},\quad (\text{对一切 } m\geqslant 0,\ n\geqslant 0)$$

1·5. 设 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是直线上整数格子点上任一随机徘徊。令

$$I=\{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}$$

$$p_{i,j}^{(n)}=P(X_{n+m}=j|X_m=i),\ i,\ j\in I,\ n,m\geqslant 0$$

$$I^* = \{i : p_{0,i}^{(1)} > 0\}$$

$$I^+ = \{i : \text{存在}\ n \geqslant 0,\ \text{使}\ p_{0,i}^{(n)} > 0\}$$

试证

$$I^+ = \{i : i = i_1 + \cdots + i_m,\ i_1, \cdots, i_m \in I^*,$$
$$m \geqslant 0,\ \text{当}\ m = 0\ \text{时},\ i_1 + \cdots + i_m\ \text{理解为}\ 0\}$$

1·6.(续习题1·5)　若 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是非常返的随机徘徊，令 $g_{0,j}^*$、$f_{0,j}^*$如定义1·3所确定，试证

(a)　$g_{0,j}^* < \infty$　(对一切 $j \in I$)

(b)　$g_{0,j}^* = f_{0,j}^* = 0$　(当 $j \in I - I^+$)

(提示：用命题1·3：$g_{i,j}^{(n)} \leqslant g_{0,0}^{(n)}$)

§2 分 枝 过 程

在这一节中，我们将要介绍一类在原子分裂中具有重要意义的另一类随机过程——分枝过程。首先我们介绍研究分枝过程所需要的一个重要工具——矩母函数。

定义2·1. 设 a_0，a_1，a_2，…是一串实数，若级数

$$A(s)=a_0+a_1s^1+a_2s^2+\cdots$$

在某个区间 $-s_0<s<s_0$ 内收敛，则称 $A(s)$ 是序列 $\{a_n\}$ 的矩母函数。

特别地，若 X 是一个随机变量，X 所可能取的值为 0，1，2，…，对应的概率为 $p_0=P(X=0)$，$p_1=P(X=1)$，$p_2=P(X=2)$，…，显然 $p_n\geqslant 0$，$(n\geqslant 0)$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_n=1$。故级数

$$P(s)=p_0+p_1s^1+p_2s^2+\cdots$$

至少在 $-1\leqslant s\leqslant 1$ 上收敛。称 $P(s)$ 为分布 $\{p_n\}$ 的矩母函数，也称 $P(s)$ 是随机变量 X 的矩母函数。

例2·1. 设 $a_n\equiv 1$，$(n\geqslant 0)$，则 $\{a_n\}$ 的矩母函数 $A(s)=\dfrac{1}{1-s}$，$(|s|<1)$。

例2·2. 设

$$a_n=\begin{cases}C_n^N & n=0,1,\cdots,N\\ 0 & n=N+1,\ N+2,\cdots\end{cases}$$

其中C_n^N为N个元素中取n个组合数，则$\{a_n\}$的矩母函数为$A(s)=(1+s)^N$，$(|s|<\infty)$。

例2·3. 设X是一个服从泊松（Poisson）分布的随机变量，即是

$$P(X=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

其中$\lambda>0$是常数，则X的矩母函数为

$$P(s)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}s^n=e^{-\lambda(1-s)}\quad (|s|<\infty)$$

命题2·1. 设X是一个只取值非负整数的随机变量，$p_n=P(X=n)$，$(n\geqslant 0)$，$\{p_n\}$是其分布，$P(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n s^n$是$X$的矩母函数，令

$$q_n=P(X>n)=p_{n+1}+p_{n+2}+\cdots\quad (n\geqslant 0)$$

$$Q(s)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n s^n$$ （$P(s)$、$Q(s)$至少在$|s|<1$收敛）则

(1) $$Q(s)=\frac{1-P(s)}{1-s}\quad (|s|<1) \tag{2·1}$$

(2) $$\mathbf{E}(X)=\sum_{n=1}^{\infty}np_n=\sum_{k=0}^{\infty}q_k \tag{2·2}$$

若用矩母函数来表示，则有

$$\mathbf{E}(X)=P'(1)=Q(1) \tag{2·3}$$

这里及今后，$\mathbf{E}(X)$ 表示X的期望（均值），

$$P'(1)=\lim_{s\uparrow 1}P'(s),\qquad P'(s) \text{ 是 } P(s) \text{ 的导数，}$$

$$Q(1)=\lim_{s\uparrow 1}Q(s)$$

（3） 若 $\mathbf{E}(X^2)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2p_n<\infty$，则

$$\mathbf{E}(X^2)=P''(1)+P'(1)=2Q'(1)+Q(1) \tag{2·4}$$

从而

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X)&=P''(1)+P'(1)-(P'(1))^2\\&=2Q'(1)+Q(1)-Q^2(1)\end{aligned} \tag{2·5}$$

$\mathrm{Var}(X)$ 表示 X 的方差。

证。（1）因为

$$\begin{aligned}q_n&=p_{n+1}+p_{n+2}+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{\infty}p_k-\sum_{j=0}^{n}p_j\\&=1-\sum_{j=0}^{n}p_j\end{aligned}$$

且

$$Q(s)=\sum_{n=0}^{\infty}q_ns^n$$

在 $|s|<1$ 内是绝对收敛的，所以交换级数的求和符号的次序可得

$$Q(s)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n s^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sum_{j=0}^{n}p_j\right)s^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}s^n-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}p_j s^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}s^n-\sum_{j=0}^{\infty}p_j s^j\sum_{n=0}^{\infty}s^n$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}s^n\right)\left(1-\sum_{j=0}^{\infty}p_j s^j\right)$$

$$=\frac{1}{1-s}\quad(1-P(s))\qquad(|s|<1)$$

（2） $$\mathbf{E}(X)=\sum_{n=0}^{\infty}np_n=\sum_{n=1}^{\infty}np_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}p_n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}p_n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}q_k$$

（3） 若 $\mathbf{E}(X^2)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2p_n<\infty$，则

$$E(X^2)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2p_n=\sum_{n=1}^{\infty}n^2p_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)p_n+\sum_{n=1}^{\infty}np_n$$

$$=\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)p_ns^{n-2}$$

$$+\lim_{s\uparrow 1}\sum_{n=1}^{\infty}np_ns^{n-1}$$

$$=P''(1)+P'(1) \tag{2·6}$$

而

$$2Q'(1)+Q(1)$$

$$=2\sum_{k=0}^{\infty}kq_k+\sum_{k=0}^{\infty}q_k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)q_k=\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)\sum_{n=k+1}^{\infty}p_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)p_n \tag{2·7}$$

若能证

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=n^2 \quad (n\geqslant 1) \tag{2·8}$$

则由（2·6）和（2·7）可得

$$2Q'(1)+2Q(1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n=\mathbf{E}(X^2)$$

$$=P''(1)+P'(1)$$

亦即（3）获证。

下面我们对 n 作归纳法来证明（2·8）。当 $n=1$ 时，

（2·8）左边$=1=$（2·8）右边。

设（2·8）对 $n=m$ 成立，则当 $n=m+1$ 时

$$(2\cdot8)\text{ 左边}=\sum_{k=0}^{m}(2k+1)$$

$$=(2m+1)+\sum_{k=0}^{m-1}(2k+1)$$

$$=(2m+1)+m^2=(m+1)^2$$

$$=(2\cdot8)\text{右边}$$

归纳法完成。命题2·1证毕。

定理2·1． 设 X 和 Y 皆为取非负整数的相互独立的随机变量，其分布分别为 $\{p_n\}$、$\{q_n\}$，其矩母函数分别为 $f(s)$ 和 $g(s)$，即是

$$P(X=n)=p_n \quad P(Y=n)=q_n \quad (n\geqslant0)$$

$$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n s^n \quad g(s)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n s^n \quad (|s|\leqslant1)$$

则 $X+Y$ 亦为取非负整数的随机变量且其矩母函数为

$$h(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X+Y=n)s^n=f(s)g(s)\quad(|s|\leqslant 1)\qquad(2\cdot 9)$$

证。 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}P(X+Y=n)s^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}P(X=k,\ Y=n-k)s^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}P(X=k)s^kP(Y=n-k)s^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}p_ks^kq_{n-k}s^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k\sum_{n=k}^{\infty}q_{n-k}s^{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k\sum_{m=0}^{\infty}q_ms^m$$

$$=f(s)g(s)\quad(|s|\leqslant 1)$$

从定理2·1，很容易推广到较一般的场合：

系。若$X_1,\cdots,X_n$是相互独立的随机变量，它们都取非负整数值，X_i的矩母函数为 $f_i(s)$，$i=1,\cdots,n$，则 $X_1+\cdots+X_n$亦为取非负整数的随机数量，且其矩母函数为

$$f_1(s)\cdot f_2(s)\cdots f_n(s)$$

下面我们研究更一般的问题，即研究所谓“随机多个”相互独立的随机变量之和的矩母函数。

定理2·2. 设N，X_1，X_2，…皆为取非负整数的随机变量，它们之间相互独立，X_1，X_2，…具有共同的分布，从而具有共同的矩母函数 $f(s)$，再令N的矩母函数为 $g(s)$，定义

$$X=\begin{cases}X_1+X_2+\cdots+X_N & \text{当}N>0\\ 0 & \text{当}N=0\end{cases} \tag{2·10}$$

则X是一个取非负整数的随机变量，X的矩母函数为

$$h(s)=g[f(s)] \quad (|s|\leqslant 1) \tag{2·11}$$

证．令

$$a_j=P(X_n=j) \quad j=0,1,2,\cdots\cdots$$
$$g_j=P(N=j) \quad j=0,1,2,\cdots\cdots$$
$$h_j=P(X=j) \quad j=0,1,2,\cdots\cdots$$

则

$$h_j=P(X=j)=P(N=0,\ X=j)+\sum_{n=1}^{\infty}P(N=n,X=j)$$

$$=P(N=0,X=j)+\sum_{n=1}^{\infty}P(N=n)P(X_1+\cdots+X_n=j)$$

$$=P(N=0,X=j)+\sum_{n=1}^{\infty}g_nP(X_1+\cdots+X_n=j)$$

所以

$$h(s)=\sum_{j=0}^{\infty}h_js^j$$

$$=\left[P(N=0,X=0)+\sum_{n=1}^{\infty}g_nP(X_1+\cdots+X_n=0)\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left[P(N=0,\ X=j)+\sum_{n=1}^{\infty}g_nP(X_1+\cdots+X_n$$

$$=j)\right]s^j$$

$$=\left[P(N=0)+\sum_{n=1}^{\infty}g_nP(X_1=0)^n\right]$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}g_nP(X_1+\cdots+X_n=j)s^j$$

$$=\left(g_0+\sum_{n=1}^{\infty}g_na_0^n\right)$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}g_n[f(s)^n-P(X_1+\cdots+X_n=0)]$$

$$=\left(g_0+\sum_{n=1}^{\infty}g_na_0^n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n[f(s)^n-a_0^n]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}g_nf(s)^n=g(f(s))$$

定理2·3.(连续性定理) 设对每个 n 来说,$a_{0,n}$, $a_{1,n}$,

$a_{2,n}$，…都是一个概率分布，即是

$$a_{k,n}\geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}=1 \quad (k\geqslant 0,\ n\geqslant 0)$$

$A_n(s)$ 和 $A(s)$ 分别为 $\{a_{0,n},\ a_{1,n},\cdots\}$ 和 $\{a_0,a_1,\cdots\}$ 的矩母函数，$\{a_0,a_1,\cdots\}$ 是一串非负有界 1 的实数，则

$$\lim_{n\to\infty} a_{k,n}=a_k \quad (k\geqslant 0) \qquad (2\cdot 12)$$

的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty} A_n(s)=A(s) \quad (0\leqslant s<1) \qquad (2\cdot 13)$$

证。必要性。设（2·12）成立，则对每一个固定的 $s\in[0,1)$ 和任何固定的 $\varepsilon>0$，总可找到一个 r，使

$$\frac{s^r}{1-s}<\varepsilon \qquad (2\cdot 14)$$

因此

$$\begin{aligned}
&|A_n(s)-A(s)| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{r}|a_{k,n}-a_k|s^k+\sum_{k=r+1}^{\infty}|a_{k,n}-a_k|s^k \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{r}|a_{k,n}-a_k|s^k+2\sum_{k=r+1}^{\infty}s^k \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{r}|a_{k,n}-a_k|s^k+2\varepsilon
\end{aligned} \qquad (2\cdot 15)$$

在（2·15）中令 $n\to\infty$，并注意（2·12）得

$$\limsup_{n\to\infty}|A_n(s)-A(s)|\leqslant 2\varepsilon \quad (0\leqslant s<1) \qquad (2\cdot 16)$$

由 $\varepsilon>0$ 且可任意小得知 (2·13) 成立。

充分性。设(2·13) 成立。由 $\{a_{0,0}, a_{1,0}, a_{2,0},\cdots\}$, $\{a_{0,1}, a_{1,1}, a_{2,1},\cdots\}$, $\{a_{0,2}, a_{1,2}, a_{2,2},\cdots\}$, …是一串有界实数序列，用熟知的“对角线”方法，一定可以找到一串序列

$$\{a_{k,j_1}, k\geqslant 0\}, \{a_{k,j_2}, k\geqslant 0\},\cdots,$$

使

$$\lim_{n\to\infty} a_{k,j_n}=\tilde{a}_k \quad (k\geqslant 0) \tag{2·17}$$

反设

$$\lim_{n\to\infty} a_{k,n}=a_k \quad (k\geqslant 0) \tag{2·18}$$

不成立，则存在

$$\lim_{n\to\infty} a_{k,u_n}=a_k^* \quad (k\geqslant 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{k,v_n}=a_k^{**} \quad (k\geqslant 0)$$

其中 $\{a_k^*, k\geqslant 0\}$ 与 $\{a_k^{**}, k\geqslant 0\}$ 不全同。利用必要性的推理方法可得：

$$\lim_{n\to\infty} A_{u_n}(s)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^* s^k \quad (0\leqslant s<1)$$

$$\lim_{n\to\infty} A_{v_n}(s)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{**} s^k \quad (0\leqslant s<1)$$

这与

$$\lim_{n\to\infty} A_n(s)=A(s) \quad (0\leqslant s<1)$$

矛盾。定理 2·3 获证。

下面我们正式引进分枝过程的概念。

（一）物理模型。设有一个反应堆，最初有 n 个质点。由于质点之间的相互碰撞或其它射线的轰击，每隔一个单位时间，一个质点可分裂成 k 个质点（$k=0,1,2,\cdots$），其对应的概率为p_k，（$p_k\geqslant 0$，$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$）。假定：

（1）这些质点的分裂情况是相互独立的，具有共同分布，即每一质点分裂出的新质点数是一个随机变量，这些随机变量相互独立且具有共同分布；

（2）质点的分裂情况与"年龄"无关。如果用$\xi_{n+1}^{(i)}$代表时刻 n 存在的第 i 个质点在下一时刻（第 $n+1$ 时刻）分裂出的新质点数，再令 X_n代表时刻 n 该反应堆中的质点数，则有

$$
\begin{aligned}
&X_0=n\\
&X_1=\xi_1^{(1)}+\xi_1^{(2)}+\cdots+\xi_1^{(n)}\\
&\vdots\\
&X_{n+1}=\xi_{n+1}^{(1)}+\xi_{n+1}^{(2)}+\cdots+\xi_{n+1}^{(X_n)}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

我们说 $\{X_n,\ n\geqslant 0\}$ 是一个分枝过程。

（二）数学定义。从上面的物理模型，不难给出分枝过程的数学定义如下：

定义 2·2. 设 $\{\xi_n^{(i)},\ i\geqslant 1,\ n\geqslant 1\}$ 是一族相互独立的具有公共分布的取非负整数的随机变量，令其公共分布为 $\{p_k,\ k\geqslant 0\}$，$p_k=P(\xi_n^{(i)}=k)$，$k\geqslant 0$，$i\geqslant 1$，$n\geqslant 1$，$p_k\geqslant 0$，$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$。令 $f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k$ 为 $\{p_k\}$（或 $\xi_n^{(i)}$）的矩

母函数，若

$$X_0=n_0$$

$$X_1=\sum_{i=1}^{n_0}\xi_1^{(i)}=\sum_{i=1}^{X_0}\xi_1^{(i)}$$

……

$$X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n}\xi_{n+1}^{(i)}\qquad(n\geqslant 0)$$

⋮

则称 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是一个初始状态为n_0的以 $f(s)$ 为本原矩母函数的分枝过程。

定理 2·4. 设 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是一个初始状态为 n_0 的以 $f(s)$为本原矩母函数的分枝过程，令$f_n(s)$ 为 X_n 的矩母函数，$\mu_n=\mathbf{E}(X_n)$，$\sigma_n^2=\mathrm{Var}(X_n)$，则

（1）$f_1(s)=f(s)^{n_0}$

（2）$f_{n+1}(s)=f_n(f(s))\quad(n\geqslant 0)$

（3）$\mu_1=n_0\mu$，其中 $\mu=f'(1)$

（4）$\mu_n=n_0\mu^n\qquad(n\geqslant 1)$

（5）$\sigma_1^2=n_0\sigma^2$，其中 $\sigma^2=f''(1)+f'(1)-(f'(1))^2$

（6）$$\sigma_n^2=\begin{cases}\dfrac{n_0\sigma^2\mu^n(\mu^n-1)}{\mu^2-\mu} & \text{当 } \mu\neq 1\\ n_0n\sigma^2 & \text{当 } \mu=1\end{cases}$$

证.（1）由定理2·1的系立即得（1）。

（2）注意X_n，$\xi_{n+1}^{(1)}$，$\xi_{n+1}^{(2)}$，…相互独立，$\xi_{n+1}^{(1)}$，$\xi_{n+1}^{(2)}$，…具有共同的矩母函数 $f(s)$，X_n 具有矩母函数 $f_n(s)$，再用定理2·2立即可得（2）。

（3）由随机变量之和的期望等于诸随机变量的期望的和可得

$$\mu_1 = \mathbf{E}(X_1) = \sum_{i=1}^{n_0} \mathbf{E}(\xi_1^{(i)})$$

再用（2·3）式可得

$$\mathrm{E}(\xi_1^{(i)}) = f'(1)$$

（3）得证。

（4）由（2）及（2·3）式可得：

$$\mu_n = f_n'(1) = f_{n-1}'(f(1))f'(1) = f_{n-1}'(1)f'(1)$$

$$= \cdots = f_0'(f(1))\ (f'(1))^n$$

$$= n_0(f'(1))^n = n_0\mu^n \quad (n \geqslant 1) \qquad (2\cdot 18)$$

（5）由独立随机变量之和的方差等于诸随机变量的方差之和，以及（2·5）式得

$$\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(X_1) = \sum_{i=1}^{n_0} \mathrm{Var}(\xi_1^{(i)})$$

$$= n_0 \mathrm{Var}(\xi_1^{(i)})$$

$$= n_0(f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2) \qquad (2\cdot 19)$$

（6）由命题2·1中（2·5）式有

$$\sigma_n^2 = \mathrm{Var}(X_n) = f_n''(1) + f_n'(1) - (f_n'(1))^2 \qquad (2\cdot 20)$$

但是由定理 2·2 有

$$f_n''(s) = [f_{n-1}(f(s))]''$$

$$= f_{n-1}''(f(s))(f'(s))^2 + f''(s)f_{n-1}'(f(s))$$

所以

$$f_n''(1)=f_{n-1}''(1)(f'(1))^2+f''(1)f_{n-1}'(1) \qquad (2\cdot21)$$

若令

$$\alpha=n_0(\sigma^2-\mu+\mu^2) \qquad (2\cdot22)$$

则由（2·18）及

$$f'(1)=\mu,\quad f''(1)=\sigma^2-\mu+\mu^2 \qquad (2\cdot23)$$

（2·21）化为

$$\begin{aligned}f_n''(1)&=f_{n-1}''(1)\mu^2+(\sigma^2-\mu+\mu^2)n_0\mu^{n-1}\\&=f_{n-1}''(1)\mu^2+\alpha\mu^{n-1}\quad(n\geqslant2)\end{aligned} \qquad (2\cdot24)$$

反复利用（2·24）递推得：

$$\begin{aligned}f_n''(1)&=f_{n-1}''(1)\mu^2+\alpha\mu^{n-1}\\&=(f_{n-2}''(1)\mu^2+\alpha\mu^{n-2})\mu^2+\alpha\mu^{n-1}\\&=f_{n-2}''(1)\mu^{2\times2}+\alpha\mu^n+\alpha\mu^{n-1}\\&=\cdots\\&=f_1''(1)\mu^{2\times(n-1)}+\alpha(\mu^{2n-3}+\mu^{2n-4}+\cdots\\&\quad+\mu^{n-1})\end{aligned} \qquad (2\cdot25)$$

所以由（2·18）、（2·23）、（2·25）得

$$\begin{aligned}\sigma_n{}^2=\mathrm{Var}(X_n)&=f_n''(1)+f_n'(1)-(f_n'(1))^2\\&=f_1''(1)\mu^{2n-2}+\alpha(\mu^{2n-3}+\mu^{2n-4}+\cdots+\mu^{n-1})\\&\quad+n_0\mu^n-n_0^2\mu^{2n}\\&=(n_0(n_0-1)\mu^2+\alpha)\mu^{2n-2}\end{aligned}$$

$$+\alpha(\mu^{2n-3}+\mu^{2n-4}+\cdots+\mu^{n-1})$$
$$+n_0\mu^n-n_0^2\mu^{2n}$$
$$=n_0(n_0-1)\mu^{2n}+\alpha(\mu^{2n-2}+\mu^{2n-3}+\cdots+\mu^{n-1})$$
$$+n_0\mu^n-n_0^2\mu^{2n}$$
$$=n_0(\mu^n-\mu^{2n})+\alpha(\mu^{2n-2}+\mu^{2n-3}+\cdots+\mu^{n-1}) \tag{2·26}$$

当 $\mu\neq1$ 时，由（2·26）得

$$\sigma_n{}^2=n_0(\mu^n-\mu^{2n})+\alpha\mu^{n-1}(1+\mu+\cdots+\mu^{n-1})$$
$$=n_0(\mu^n-\mu^{2n})+n_0(\sigma^2-\mu+\mu^2)\mu^{n-1}(1+\mu+\cdots+$$
$$+\mu^{n-1})$$
$$=\frac{n_0[(1-\mu)(\mu^n-\mu^{2n})+(\sigma^2-\mu+\mu^2)\mu^{n-1}(1-\mu^n)]}{(1-\mu)}$$
$$=\frac{n_0\sigma^2\mu^{n-1}(1-\mu^n)}{1-\mu}=\frac{n_0\sigma^2\mu^n(\mu^n-1)}{\mu^2-\mu}$$

当 $\mu=1$ 时，由（2·26）得

$$\sigma_n{}^2=n\alpha=n\cdot n_0(\sigma^2-\mu+\mu^2)$$
$$=nn_0\sigma^2$$

至此，定理2·4证毕。

上面我们研究了分枝过程的期望与方差的计算。下面我们研究分枝过程的“绝灭”概率。

定义2·3．设 $\{X_n,\ n\geqslant0\}$ 是一个分枝过程，称

$$\rho\equiv\lim_{n\to\infty}P(X_n=0) \tag{2·27}$$

为 $\{X_n,\ n\geqslant0\}$ 的绝灭概率。

注意：由分枝过程的定义得知

$$\{X_n=0\}\subset\{X_{n+1}=0\}$$

所以 $P(X_n=0)$ 对 n 而言单调非降，因此（2·27）右端之

极限存在，显然此极限 $\rho\in[0,1]$。

定理2·5. 设 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是一个初始状态为1的以

$f(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ 为本原矩母函数的分枝过程，设 $\mu=f'(1)$

$=\lim\limits_{s\uparrow 1} f'(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} np_n$，$\rho$为该分枝过程的绝灭概率，则

（1）$\rho=f(\rho)$；

（2）当 $\mu\leqslant 1$，$p_1<1$ 时，有 $\rho=1$；

（3）当 $\infty\geqslant\mu>1$ 时，ρ 是 $s=f(s)$ 在 $[0,1)$内的唯一解。

证. 首先注意：若令 $f_n(s)$ 为 X_n 的矩母函数，由于该分枝过程的初始状态为1，所以 $f_1(s)\equiv f(s)$。

（1）由定理2·4（2）有

$$f_{n+1}(s)=f_n(f(s))=f(f_n(s)) \tag{2·28}$$

再用 ρ 的定义得知

$$\begin{aligned}\rho&=\lim_{n\to\infty} P(X_n=0)=\lim_{n\to\infty} f_n(0)\\&=\lim_{n\to\infty} f(f_{n-1}(0))\\&=f(\lim_{n\to\infty} f_{n-1}(0))\\&=f(\rho)\end{aligned}$$

（2）（A）先设 $\mu\leqslant 1$，$p_0+p_1<1$。则

$$f'(s)=\sum_{n=1}^{\infty} np_n s^{n-1}$$

在区间 [0, 1) 内严格单调上升。但是

$$\mu=f'(1)=\lim_{s\uparrow 1}f'(s)$$

所以

$$\mu>f'(s) \quad （当\ s\in[0,\ 1)时） \qquad (2\cdot 29)$$

谬设 $\rho<1$，则存在 $c\in(\rho,\ 1)$，使

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(\rho)}{1-\rho}=\frac{1-\rho}{1-\rho}=1 \qquad (2\cdot 30)$$

由（2·29）和（2·30）得知

$$\mu>f'(c)=1$$

这与假设 $\mu\leqslant 1$ 矛盾，所以 $\rho=1$。

（B）再设 $\mu\leqslant 1$，$p_1<1$，$p_0+p_1=1$。则

$$f(0)=p_0,\ f_1(0)=f(f(0))=f(p_0)=p_0+p_1p_0\cdots\cdots$$

$$f_{n+1}(0)=f(f_n(0))=p_0+p_0p_1+\cdots+p_0p_1^n$$

$$=p_0\cdot\frac{1-p_1^{n+1}}{1-p_1}$$

所以

$$\rho=\lim_{n\to\infty}P(X_n=0)=\lim_{n\to\infty}f_n(0)$$

$$=\lim_{n\to\infty}p_0\cdot\frac{1-p_1{}^n}{1-p_1}$$

$$=\frac{p_0}{1-p_1}=1$$

（3）设 $\infty\geqslant\mu>1$。则必有 $p_0+p_1<1$，所以$f'(s)$在 [0, 1) 内严格单调上升。如果我们能证

存在 $b<1$，使 $f(s)<s$，（当 $s\in(b,\ 1)$），(2·31)

则 $s\in(b,\ 1)\Rightarrow s>f(s)>f(f(s))\cdots>f(f_n(s))$

令 $s\downarrow b$ 得

$$b \geqslant f(f_n(b)) = f_{n+1}(b)$$

所以

$$\rho = \lim_{n\to\infty} f_n(0) \leqslant \limsup_{n\to\infty} f_n(b)$$

$$\leqslant b < 1$$

而（1）中已证 $\rho = f(\rho)$，这就证明了 ρ 是 $s = f(s)$ 在 $[0, 1)$ 内的一个解。

再证 ρ 是 $s = f(s)$ 在 $[0, 1)$ 内的唯一解。

若 t_1，t_2 是 $s = f(s)$ 在 $[0, 1)$ 内的任意两个解。不妨令 $0 \leqslant t_1 < t_2 < 1$，那么必存在 $u_1 \in (t_1, t_2)$，$u_2 \in (t_2, 1)$，使

$$f'(u_1) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} = 1$$

$$f'(u_2) = \frac{f(1) - f(t_2)}{1 - t_2} = \frac{1 - t_2}{1 - t_2} = 1$$

所以

$$f'(u_1) = f'(u_2) \tag{2·32}$$

而今 $u_1 < u_2$，$f'(s)$ 在 $[0, 1)$ 内严格单调上升，$u_1 \in [0, 1)$，$u_2 \in [0, 1)$，因此（2·32）是不可能成立的。这就证明了 $s = f(s)$ 在 $[0, 1)$ 内不可能有两个不同的解。

最后我们补证（2·31）。因为

$$\lim_{s\uparrow 1} f'(s) = \mu > 1$$

所以存在 $b < 1$，使 $f'(b) > 1$。但是当 $s \in (b, 1)$ 时，必存在 c，使 $1 > c > s > b$，且

$$\frac{f(1) - f(s)}{1 - s} = f'(c) > f'(b) > 1$$

这就证明了（2·31）。定理证毕。

在定理 2·5 中，我们研究了初始状态为1的分枝过程的绝灭概率的求法。对于一般的初始状态为n_0的分枝过程，其绝灭概率如何求？在正式回答这一个问题以前，我们先分析一下定理2·5的概率直观意义及分析意义。

先说概率直观意义。定理 2·5 的（2）说：当 $\mu\leqslant 1$ 且 $p_1<1$ 时，$\rho=1$。$p_1<1$ 的概率意义是一个质点，下一时刻分裂出的质点的个数不恒为1，此条件当然是 $\rho=1$ 的必要条件。如果 $p_1=1$，那么开始是一个质点，以后永远是一个质点，当然此分枝过程的绝灭概率$\rho=0$。再看条件$\mu\leqslant 1$。这个条件，粗略看来，也是必要的，因为由定理2·4（4）可知 $\mathbf{E}(X_n)=\mu_n=\mu^n$，（注意：现在 $n_0=1$）。当 $\mu>1$时，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n)=\lim_{n\to\infty}\mu^n=\infty \qquad (2\cdot 33)$$

这意思是说：当 $\mu>1$ 时，该分枝过程的质点个数的均值随着时间的推移而向∞趋，在这种情况下，分枝过程的绝灭概率 ρ 当然不大可能为1。而定理2·5的(3)，正好证明了 $\mu\leqslant 1$ 是 $\rho=1$ 的必要条件。定理2·5(2) 又证明了“$\mu\leqslant 1$ 与 $p_1<1$”是 $\rho=1$ 的充分条件。总之“$\mu\leqslant 1$ 且 $p_1<1$”是 $\rho=1$ 的充分必要条件。

其次，我们谈谈定理2·5的分析意义。定理2·5，我们是作为分枝过程的绝灭概率而提出来的一个定理，其实，完全可以撇开概率论，撇开分枝过程来研究定理 2·5 中的问题，这就是下面的

定理2·6． 设 p_0，p_1，…是一个非负实数序列，

$\sum_{n=0}^{\infty} p_n=1$，$f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ 是 $\{p_n\}$ 的矩母函数，令 $\mu=$

$f'(1)=\lim_{s\uparrow 1} f'(s)=\sum_{n=0}^{\infty} np_n$，再令

$$f_1(s)=f(s) \tag{2·34}$$
$$f_{n+1}(s)=f(f_n(s)) \quad (n\geqslant 1)$$

注意：这样定义的 $f_n(s)$ 显然满足

$$f_{n+1}(s)=f_n(f(s)) \quad (n\geqslant 1) \tag{2·35}$$
$$f_{n+1}(0)=f_n(f(0))\geqslant f_n(0) \quad (n\geqslant 1) \tag{2·36}$$

令

$$\rho=\lim_{n\to\infty} f_n(0) \tag{2·37}$$

（注意：由（2·36）知（2·37）右端之极限必存在且落于区间 [0，1]。）则

（1）$\rho=f(\rho)$；

（2）当 $\mu\leqslant 1$ 且 $p_1<1$ 时，有 $\rho=1$；

（3）当 $\infty\geqslant\mu>1$ 时，ρ 是 $s=f(s)$ 在 [0，1) 内的唯一解。

证．在定理2·5中，把 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 撇开，则可逐字逐句地把定理2·5的证明搬来作为定理2·6的证明。

定理 2·7. 设 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是一个初始状态为 n_0 的以 $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ 为本原矩母函数的分枝过程，设 $\mu=f'(1)=\lim_{s\uparrow 1} f'(s)=\sum_{n=0}^{\infty} np_n$，$\overline{\rho}$ 为该分枝过程的绝灭概率，再令

$$f_1(s)=f(s)$$
$$f_{n+1}(s)=f(f_n(s))=f_n(f(s))$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty} f_n(0) \quad (\text{由定理}2\cdot6\text{有 } \rho=f(\rho))$$

则

$$\overline{\rho}=\rho^{n_0}$$

（注意ρ在定理2·6中已算出）。

证。令 $\overline{f_n}(s)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X_n=k)s^k \quad (|s|\leqslant1)$

为X_n的矩母函数，由绝灭概率的定义有

$$\overline{\rho}=\lim_{n\to\infty}\overline{f_n}(0) \qquad (2\cdot38)$$

但是，由定理2·4（注意此处的$\bar{f}_n$相当于定理2·4中的f_n）有

$$\bar{f}_1(s)=f(s)^{n_0}$$

$$\bar{f}_{n+1}(s)=\bar{f}_n(f(s))=\bar{f}_{n-1}(f(f(s)))$$

$$=\bar{f}_{n-1}(f_2(s))=\cdots=\bar{f}_1(f_n(s)) \qquad (2\cdot39)$$

所以由（2·38）和（2·39）有

$$\overline{\rho}=\lim_{n\to\infty}\bar{f}_n(0)=\lim_{n\to\infty}\bar{f}_1(f_n(0))$$

$$=\bar{f}_1(\lim_{n\to\infty}f_n(0))=\bar{f}_1(\rho)$$

$$=f(\rho)^{n_0}=\rho^{n_0}$$

我们在定理 2·7 中找出了初始状态为n_0的分枝过程的绝灭概率。我们用的是纯分析的严格的形式逻辑的方法，这种严格的形式逻辑的方法，对数学研究来说是重要的。但能否从概率的直观，从定理 2·5，猜出定理 2·7 的结果呢？我们说，可以。由于在分枝过程的模型，假定了各质点的分裂是相互独立的，且与该质点的“年龄”无关。所以，一个初始状态为n_0的分枝过程可以看作n_0个相互独立的初始状态为 1

的分枝过程，而一个初始状态为n_0的分枝过程绝灭又可以看作n_0个初始状态为1的分枝过程通通绝灭，它们每一个绝灭的概率为ρ，n_0个独立事件同时发生的概率等于这n_0个事件每一个发生的概率的乘积，所以一个初始状态为n_0的分枝过程的绝灭概率$\overline{\rho}=\rho^{n_0}$，其中$\rho$是一个初始状态为1的分枝过程的绝灭概率。这种概率直观，有时对数学研究也是非常重要的。

习　　题

2·1. 设X是一个取非负整数的随机变量，$P(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P(X=n)s^n$是$X$的矩母函数，试求$mX+k$的矩母函数，其中$m$和$k$皆为正整数。

2·2. 设X是一个取非负整数的随机变量，$p_n=P(X=n)$，$(n\geqslant 0)$，$P(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n s^n$是$\{p_n\}$（或者说$X$）的矩母函数，试求下列诸实数序列的矩母函数：

(a) $\{P(X\leqslant n),\ n\geqslant 0\}$；

(b) $\{P(X<n),\ n\geqslant 0\}$；

(c) $\{P(X\geqslant n),\ n\geqslant 0\}$；

(d) $\{P(X>n+1),\ n\geqslant 0\}$；

(e) $\{P(X=2n);\ n\geqslant 0\}$。

2·3. 设E_1，E_2，…是一串贝努利试验，即这些试验是相互独立的，每次试验恰有两个可能的结果：成功、失败，出现“成功”的概率为p，出现“失败”的概率为q，$0<p<1$，$p+q=1$。令u_n为前n次试验E_1，…，E_n中出现

"成功"的总次数为偶数的概率，试证下列递推公式：

$$u_n = qu_{n-1} + p(1-u_{n-1}) \quad (n \geqslant 2)$$

由此算出 $\{u_n,\ n\geqslant 0\}$ 的矩母函数，进而求出u_n的精确表达式。

2·4.（续习题2·3） 设 E_1，E_2，…是一串贝努利试验，从第一次试验开始到首先出现"失败"那次试验为止，构成第一个"回合"，于是再开始第二个"回合"，…。令S_r是前面 r 个回合中"成功"出现的总次数，S_r是一个取非负整数的随机变量。试求S_r的矩母函数及其概率分布。

2·5. 设 $\{X_n,\ n\geqslant 0\}$是一个初始状态为n_0的以 $f(s)=\dfrac{q}{1-ps}$为本原矩母函数的分枝过程，其中 $0<p<1$，$p+q=1$。试求其绝灭概率$\overline{\rho}$及 $\mathbf{E}(X_n)$ 和 $V_{ar}(X_n)$。

2·6. 设 $\{X_n,\ n\geqslant 0\}$ 是一个初始状态为 1 的以 $f(s)$为本原矩母函数的分枝过程，$\mu=f'(1)=\lim\limits_{s\uparrow 1}f'(s)>1$，$\rho$是其绝灭概率。令 $\{Y_n,\ n\geqslant 0\}$ 是一个初始状态为 1 的以

$$g(s)=\frac{1}{1-\rho}[f(s(1-\rho)+\rho)-\rho]$$

为本原矩母函数的分枝过程，试求其绝灭概率及 $\mathbf{E}(Y_n)$ 和 $\mathrm{Var}(Y_n)$。

2·7. 设 $\{X_n,\ n\geqslant 0\}$是一个初始状态为n_0的以 $f(s)$为本原矩母函数的分枝过程，试证：对任何非负整数 i，j，k 及任意正整数 n，有

$$P(X_{n+1}=k,\ X_{n-1}=j\,|\,X_n=i)$$
$$=P(X_{n+1}=k\,|\,X_n=i)P(X_{n-1}=j\,|\,X_n=i)$$

上式的概率意义是：若把时刻 n 视为现在，则"知道现在以后，过去和将来是独立的"。

§ 3 泊松过程

泊松过程是一类直观意义很强的过程，而且对它的论述方法有多种模型。在这一节中，我们用“具有平稳独立增量和单跳跃的非负整值过程”来讲述它。

考虑一个来到某一“服务机构”要求服务的“顾客流”。此处“服务机构”和“顾客流”都是抽象的可以有不同含义的，例如，来到某一电话交换台的电话呼唤，交换台就是服务机构，所有的呼唤依先后次序构成一个顾客流；再如来到某轮船码头要求装卸货物的轮船，码头就是服务机构，依次来到的轮船就构成一个顾客流；又如送到某一修理厂装修的机器，修理厂就是服务机构，而依次送去的机器就构成一个顾客流。

我们暂不研究一般的顾客流，仅研究一种最简单的顾客流，它将产生本节要研究的泊松过程。

令X_t为在时间区间$[0,t)$中来到某一服务机构的顾客的个数，$t\geqslant 0$。显然$\{X_t,t\geqslant 0\}$是一族随机变量。对$\{X_t,t\geqslant 0\}$，我们作如下假设：

（1）零初值：$X_0\equiv 0$；

（2）平稳增量：即是对任何$t\geqslant s\geqslant 0$，$h>0$，X_t-X_s与$X_{t+h}-X_{s+h}$有相同的分布，亦即

$$P(X_t-X_s=k)=P(X_{t+h}-X_{s+h}=h)\quad (k\geqslant 0)$$

（3）独立增量：即是对任何正整数n，任何非负实数

$0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$，有

$$X_{t_1}-X_{t_0},\quad X_{t_2}-X_{t_1},\quad \cdots,\quad X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$$

相互独立；

（4）单跳跃：即

$$\lim_{t\to 0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P(X_{t+h}-X_h=k)}{t}=0 \quad (h\geqslant 0)$$

（5）随机性：即是 $0<P(X_{h+t}-X_h=0)<1$，（亦即在时间区间$[h,h+t)$内有顾客到来的概率既非0又非1）及

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(X_{t+h}-X_h=k)=1,\ (t,h\geqslant 0)。$$

定义3·1．若 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 满足上述五个条件，则称之为最简单流，或者称之为泊松过程。

为什么称满足上述五个条件的 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 为泊松过程呢？因为有下面的

定理3·1．若 $\{X_t, t\geqslant 0\}$为泊松过程，则存在一个$\lambda>0$，使

$$P(X_{a+t}-X_a=k)=P(X_t=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{3·1}$$

$(k=0,1,2,\cdots,\ a\geqslant 0,\ t\geqslant 0)$ 我们称 λ 为泊松过程 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 的强度。

证．由$\{X_t,\ t\geqslant 0\}$的零初值及平稳增量，必有

$$P(X_{t+a}-X_a=k)=P(X_t=k) \quad (a\geqslant 0,\ t\geqslant 0, k=0,1,\cdots)$$

令

$$v_k(t)=P(X_t=k) \quad (t\geqslant 0, k=0,1,2,\cdots)$$

（1）首先证明存在一个 $\lambda>0$，使

$$v_0(t)=e^{-\lambda t} \quad (t>0) \tag{3·2}$$

事实上，把区间 $[0, 1)$ 分成 n 等分：

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$$

$$t_i-t_{i-1}=\frac{1}{n} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3·3}$$

则由 $\{X_t, \ t\geqslant 0\}$ 具有独立平稳增量可得

$$v_0(1)=P(X_1=0)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_{t_i}-X_{t_{i-1}}=0\}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}=0)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}v_0(t_i-t_{i-1})$$

$$=v_0\left(\frac{1}{n}\right)^n \tag{3·4}$$

所以，若令$v_0(1)=\theta$，则有

$$v_0\left(\frac{1}{n}\right)=\theta^{\frac{1}{n}}$$

仿（3·4）可以证明：

$$v_0\left(\frac{k}{n}\right)=\left(v_0\left(\frac{1}{n}\right)^k\right)=\theta^{\frac{k}{n}} \quad (0\leqslant k\leqslant n) \tag{3·5}$$

若 t 是任意一个固定的正数，总可取 $k=k(n)$，使得

$$\frac{k-1}{n} \leqslant t < \frac{k}{n} \tag{3·6}$$

显然，由零初值，平稳增量及随机性有

$$“t_1 > t_2 \Rightarrow \{X_{t_1}=0\} \subset \{X_{t_2}=0\}”$$

所以 $\nu_0(t)$ 是 t 的单调非升函数，从而由（3·5）和（3·6）可知

$$\theta^{\frac{k-1}{n}} = \nu_0\left(\frac{k-1}{n}\right) \geqslant \nu_0(t) \geqslant \nu_0\left(\frac{k}{n}\right) = \theta^{\frac{k}{n}} \tag{3·7}$$

由（3·6）得知：$n \to \infty$ 时有 $\frac{k}{n} \to t$，$\frac{k-1}{n} \to t$，所以，在(3·7)中令 $n \to \infty$ 即得

$$\nu_0(t) = \theta^t \quad (t>0)$$

而由条件（5）随机性及条件（2）平稳增量性有

$$0 < P(X_{t+h} - X_h = 0) = P(X_t = 0)$$
$$= \nu_0(t) < 1 \quad (t>0)$$

更有

$$0 < \theta = \nu_0(1) < 1$$

所以，存在一个正数 λ，使

$$\theta = e^{-\lambda}$$

从而

$$\nu_0(t) = \theta^t = e^{-\lambda t}$$

（2）再证对任何正数 t，任何正整数 k，有

$$\nu_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

把$[0, t)$分成 n 等分

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$$

$$\delta = t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n} \quad (i=1,\cdots,n)$$

再令

$$H_1 = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \leqslant 1\}$$

$$H_2 = \bigcup_{i=1}^{n} \{X_{t_i} - X_{t_{i-1}} > 1\}$$

则H_1与H_2为互斥事件，且$H_1 \cup H_2$为必然事件。所以

$$\begin{aligned} v_k(t) &= P(X_t = k) \\ &= P(\{X_t = k\} \cap H_1) + P(\{X_t = k\} \cap H_2) \end{aligned} \tag{3·8}$$

若考虑X_t是$[0,\ t)$内来到的顾客数，则

$$\{X_t = k\} \cap H_1$$

表示

$$[0, t_1),\ [t_1, t_2),\ \cdots,\ [t_{n-1}, t_n)$$

这 n 个区间中恰有 k 个区间其中每个区间各来到一个顾客，而其余$n-k$个区间无顾客来到。所以

$$P(\{X_t = k\} \cap H_1) = C_k^n (v_1(\delta))^k (v_0(\delta))^{n-k} \tag{3·9}$$

其中 C_k^n表示 n 个元素中取 k 个的组合数。由于

$$n \to \infty \text{ 时 } \delta \to 0$$

而且 $v_0(t) = e^{-\lambda t}$，（对一切 $t > 0$），所以，

$$\begin{aligned} (v_0(\delta))^{n-k} &= e^{-\lambda\delta(n-k)} = e^{-\lambda t} e^{\lambda k \delta} \\ &= e^{-\lambda t}(1 + 0(1)) \ (\text{当 } n \to \infty) \end{aligned} \tag{3·10}$$

再利用单跳跃性有

$$(v_1(\delta))^k = \left(1 - e^{-\lambda\delta} - \sum_{i=2}^{\infty} v_i(\delta)\right)^k$$

$$=(1-e^{-\lambda\delta}-0(\delta))^k$$

$$=(\lambda\delta)^k(1+0(1))$$

$$=\frac{(\lambda t)^k}{n^k}(1+0(1))\quad(n\to\infty)\tag{3·11}$$

以 (3·10) 、 (3·11) 代入 (3·9) 得

$$P(\{X_t=k\}\cap H_1)$$

$$=C_k^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{n^k}(1+0(1))^2$$

$$=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}(1+0(1))^2$$

$$(n\to\infty)$$

在上式中令$n\to\infty$即得

$$P(\{X_t=k\}\cap H_1)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\tag{3·12}$$

而

$$P(\{X_t=k\}\cap H_2)\leqslant P(H_2)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(X_{t_i}-X_{t_{i-1}}>1)$$

$$=nP(X_{t_1}-X_{t_0}>1)$$

$$=n\sum_{k=2}^{\infty}P(X_{t_1}-X_{t_0}=k)$$

$$=n\sum_{k=2}^{\infty}\nu_k\left(\frac{t}{n}\right)$$

$$=t\frac{\sum_{k=2}^{\infty}v_k\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}$$

在上式中令$n\to\infty$，并利用单跳跃性可得

$$P(\{X_t=k\}\cap H_2)=0 \tag{3·13}$$

由（3·12）、（3·13）得

$$P(X_t=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad (t>0,k=1,2\cdots)$$

（2）获证。总结（1）和（2）有

$$P(X_t=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad (t>0,k=0,1,2\cdots)$$

而当 $t=0$，$k=0,1,2,\cdots$时，（3·1）显然成立。总之(3·1)成立。定理证毕。

下面我们将研究一类较泊松过程更为普遍的过程——非平稳（非齐次）泊松过程。

定义3·2。若$\{X_t,t\geqslant0\}$仅满足定义3·1前的零初值性、独立增量、单跳跃、随机性（平稳增量性不一定成立），则称$\{X_t,\ t\geqslant0\}$是非平稳泊松过程。

定理3·2。若 $\{X_t,\ t\geqslant0\}$ 是非平稳泊松过程，且满足$\lim\limits_{h\to0}P(X_{t+h}=k)=P(X_t=k)$ 及

$$\lim_{h\to0}\frac{1-P(X_{t+h}-X_t=0)}{h}=\lambda(t)\quad (t\geqslant0) \tag{3·14}$$

存在，其中$\lambda(t)$是$[0,\infty)$上的非负可积函数，则X_t的矩母函数为

$$\Psi_t(z)=e^{m(t)(z-1)}\quad (|z|\leqslant1) \tag{3·15}$$

其中

$$m(t)=\int_0^t \lambda(u)du \tag{3·16}$$

注意：所谓X_t的矩母函数为（3·15），意即X_t的分布

$$P(X_t=k)=e^{-m(t)}\frac{m(t)^k}{k!} \quad (t\geqslant 0,\ k=0,1,\cdots) \tag{3·17}$$

特别地，当 $\lambda(t)\equiv\lambda>0$ 时，则 $m(t)=\lambda t$，从而非平稳泊松过程化为泊松过程。因此，“非平稳泊松过程”从逻辑上看不完全恰当，而称之为“未必平稳泊松过程”较恰当。但这种称呼法已沿用成习惯，故我们仍用“非平稳泊松过程”这一名称。

我们称$\lambda(t)$为$\{X_t,\ t\geqslant 0\}$的强度函数。这是因为由单跳跃性及（3·14）有

$$\lambda(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1-P(X_{t+h}-X_t=0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{P(X_{t+h}-X_t=1)}{h} \tag{3·18}$$

所以，当$h>0$且很小时，有

$$\lambda(t)h\approx P(X_{t+h}-X_t=1)$$

亦即$\lambda(t)h$近似地等于$[t,t+h)$内恰来一个顾客的概率。

下面我们用矩母函数的方法来证明定理3·2。注意：对任意取非负整值的随机变量Y而言，其矩母函数为

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(Y=k)z^k=\mathbf{E}(z^Y) \tag{3·19}$$

而今X_t与$X_{t+h}-X_t$相互独立（$t\geqslant 0$，$h\geqslant 0$），又因为相互

独立的随机变量之和的矩母函数等于各自的矩母函数的乘积，所以 X_{t+h} 的矩母函数为：

$$\Psi_{t+h}(z)=\mathbf{E}(z^{X_t})\,\mathbf{E}(z^{X_{t+h}-X_t})$$

$$=\Psi_t(z)\mathbf{E}(z^{X_{t+h}-X_t}) \tag{3·20}$$

所以

$$\frac{1}{h}(\Psi_{t+h}(z)-\Psi_t(z))$$

$$=\Psi_t(z)\cdot\frac{1}{h}(\mathbf{E}(z^{X_{t+h}-X_t})-1)$$

$$=\Psi_t(z)\Big[\frac{1}{h}(P(X_{t+h}-X_t=0)-1)$$

$$+\frac{1}{h}(P(X_{t+h}-X_t=1)z)$$

$$+\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{\infty}P(X_{t+h}-X_t=k)z^k\Big] \tag{3·21}$$

但是，由单跳跃性有

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{\infty}P(X_{t+h}-X_t=k)z^k=0\quad(|z|\leqslant1) \tag{3·22}$$

由（3·18）有

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}P(X_{t+h}-X_t=1)z=\lambda(t)z \tag{3·23}$$

$$\lim_{h\to0+}\frac{1}{h}(P(X_{t+h}-X_t=0)-1)=-\lambda(t) \tag{3·24}$$

以 (3·22)、(3·23)、(3·24) 代入 (3·21) 得

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\Psi_{t+h}(z)-\Psi_t(z)}{h}$$

$$=\Psi_t(z)\lambda(t)(z-1),\quad (|z|\leqslant 1) \qquad (3\cdot 25)$$

仿之可证（注意$\lim\limits_{h\to 0}P(X_{t+h}=k)=P(X_t=k)$）

$$\lim_{h\to 0-}\frac{\Psi_{t+h}(z)-\Psi_t(z)}{h}=\Psi_t(z)\lambda(t)(z-1)\quad (|z|<1)$$

$$(3\cdot 26)$$

总之

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t(z)=\Psi_t(z)\lambda(t)(z-1)\quad (|z|<1)\ (3\cdot 27)$$

显然，下列初始条件成立

$$\Psi_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X_0=k)z^k\equiv 1\quad (|z|<1)\quad (3\cdot 28)$$

由 (3·27)、(3·28)，解微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial t}\Psi_t(z)=\Psi_t(z)\lambda(t)(z-1)\\ \Psi_0(z)=1\end{cases}$$

得

$$\log\Psi_t(z)=\int_0^t\lambda(u)(z-1)du$$

即

$$\Psi_t(z)=e^{m(t)(z-1)}$$

定理证毕。

定义3·3。 若$\{X_t,\ t\geqslant 0\}$满足定义3·1前的条件(1)、(2)、(3)、(5)，(即是单跳跃不一定成立)，则称

$\{X_t, \ t\geqslant 0\}$ 是广义泊松过程。

定理3·3。 设 $\{X_t, \ t\geqslant 0\}$是广义泊松过程，而且满足 $\lim\limits_{h\to 0}P(X_{t+h}=k)=P(X_t=k)$ 及

$$\lim_{h\to 0+} P(X_{t+h}-X_t=k \mid X_{t+h}-X_t\geqslant 1)=p_k \quad (3\cdot 29)$$

$(t\geqslant 0, \ k=1,2,\cdots)$，其中 $p_k\geqslant 0$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k=1$，则存在正数 λ，使 X_t的矩母函数及特征函数分别为

$$\begin{cases} \Psi_t(z)=E(z^{X_t})=e^{\lambda t(\psi(z)-1)} & |z|\leqslant 1 \\ \phi_{X_t}(u)=E(e^{iuX_t})=e^{\lambda t(\phi(u)-1)} & u\in(-\infty,\infty) \end{cases} \quad (3\cdot 30)$$

其中

$$\begin{cases} \Psi(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k z^k & (|z|\leqslant 1) \\ \varphi(u)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k e^{iku} & (-\infty<u<\infty) \end{cases} \quad (3\cdot 31)$$

分别为分布列 $\{p_k\}$ 所对应的矩母函数及特征函数。

注意：若 $p_1=1$，$p_k=0$，（当 $k\neq 1$ 时），则 $\varphi(u)=e^{iu}$，从而X_t的特征函数为

$$\varphi_{X_t}(u)=e^{\lambda t(e^{iu}-1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{iku} \quad (3\cdot 32)$$

此即

$$P(X_t=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad (3\cdot33)$$

所以当 $p_1=1$ 时，广义泊松过程化为泊松过程。

现在我们来证明定理3·3。令

$$\Psi_t(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X_t=k)z^k=\mathbf{E}(z^{X_t}) \qquad (|z|\leqslant1)$$

为X_t的矩母函数。当$t\geqslant0$，$h\geqslant0$时，由X_t与$X_{t+h}-X_t$相互独立，得知$X_{t+h}=X_t+(X_{t+h}-X_t)$的矩母函数$\Psi_{t+h}(z)$等于$X_t$的矩母函数与（$X_{t+h}-X_t$）的矩母函数的乘积，即是

$$\Psi_{t+h}(z)=\Psi_t(z)\mathbf{E}(z^{X_{t+h}-X_t})$$

$$=\Psi_t(z)\sum_{k=0}^{\infty}P(X_{t+h}-X_t=k)z^k$$

$$=\Psi_t(z)\sum_{k=0}^{\infty}P(X_h=k)z^k$$

$$=\Psi_t(z)\Psi_h(z) \quad (|z|\leqslant1) \qquad (3\cdot34)$$

从而

$$\lim_{h\to0+}\frac{\Psi_{t+h}(z)-\Psi_t(z)}{h}$$

$$=\Psi_t(z)\lim_{h\to0+}\frac{\Psi_h(z)-1}{h} \quad (|z|\leqslant1) \qquad (3\cdot35)$$

仿（3·34），当 $t>0$，$h>0$，$t-h\geqslant0$ 时，有

$$\Psi_t(z)=\Psi_{t-h}(z)\Psi_h(z) \quad (|z|\leqslant1) \qquad (3\cdot36)$$

从而

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\Psi_t(z)-\Psi_{t-h}(z)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\Psi_{t-h}(z)\frac{\Psi_h(z)-1}{h} \tag{3·37}$$

但是

$$\lim_{h\to 0+}P(X_{t-h}=k)=P(X_t=k) \quad (t>0, k=0,1,\cdots)$$

所以

$$\lim_{h\to 0+}\Psi_{t-h}(z)=\Psi_t(z) \quad (|z|<1) \tag{3·38}$$

以（3·38）代入（3·37）得

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\Psi_t(z)-\Psi_{t-h}(z)}{h}$$

$$=\Psi_t(z)\lim_{h\to 0+}\frac{\Psi_h(z)-1}{h} \quad (|z|<1) \tag{3·39}$$

由（3·35）、（3·39）得

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t(z)=\Psi_t(z)\lim_{h\to 0+}\frac{\Psi_h(z)-1}{h} \quad (|z|<1) \tag{3·40}$$

但是当 $h>0$ 时

$$\frac{\Psi_h(z)-1}{h}=\frac{1}{h}[P(X_h=0)-1]$$

$$+\frac{1}{h}P(X_h\geqslant 1)\sum_{k=1}^{\infty}z^k P(X_h=k|X_h\geqslant 1) \tag{3·41}$$

仿（3.2）可证

$$P(X_t=0)=e^{-\lambda t} \quad (t>0)$$

（注意：在（3·2）的证明中只用到零初值、独立平稳增量及随机性，而未用到单跳跃性。）
所以

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(1-P(X_h=0))$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}(1-e^{-\lambda h})=\lambda \tag{3·42}$$

而由（3·29）有

$$\lim_{h\to 0+}\sum_{k=1}^{\infty} z^k P(X_h=k|X_h\geqslant 1)$$

$$=\lim_{h\to 0+}\sum_{k=1}^{\infty} z^k P(X_{t+h}-X_t=k|X_h\geqslant 1)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k \quad (|z|<1) \tag{3·43}$$

以（3·42）、（3·43）代入（3·41）得

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\Psi_h(z)-1}{h}=\lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k-1\right) \quad (|z|<1) \tag{3·44}$$

以（3.44）代入（3.40）得

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_t(z)=\Psi_t(z)\lambda\left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k-1\right) \quad (|z|<1) \tag{3·45}$$

显然还有初始条件$\Psi_0(z)=1$，所以解微分方程（3·45）得

$$\Psi_t(z)=e^{\lambda t\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k z^k-1\right)}\quad |z|<1$$

而上式两边在$|z_0|=1$上收敛，因此，用阿贝尔（Abel）第二定理有

$$\Psi_t(z_0)=\lim_{n\to\infty}\Psi_t\left(\frac{n-1}{n}z_0\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\lambda t\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k\left(\frac{n-1}{n}z_0\right)^k-1\right)}$$

$$=e^{\lambda t\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k z_0^k-1\right)}$$

所以

$$\Psi_t(z)=e^{\lambda t\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k z^k-1\right)}\quad (|z|\leqslant 1)\tag{3·46}$$

特别地，在上式中取 $z=e^{iu}$ 得

$$\varphi_{X_t}(u)=\mathbf{E}(e^{iuX_t})$$

$$=\mathbf{E}((e^{iu})^{X_t})$$

$$=\Psi_t(e^{iu})$$

$$=e^{\lambda t\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k e^{iku}-1\right)}$$

$$=e^{\lambda t(\phi(u)-1)}\quad (-\infty<u<+\infty)$$

定理证毕。

定义3·4. 设 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，$\{\xi_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是一串相互独立的具有公共分布的随机变量，且$\{\xi_n\}$与$\{X_t\}$亦相互独立，令

$$Y_t=\sum_{n=1}^{X_t}\xi_n\quad (t\geqslant 0)\tag{3·47}$$

称$\{Y_t, t\geqslant 0\}$为复合泊松过程。

定理3·4. 设$\{Y_t, t\geqslant 0\}$是(3·47)中所定义的复合泊松过程，则

（1）$\{Y_t, t\geqslant 0\}$ 具有独立增量；

（2）$\{Y_t, t\geqslant 0\}$ 具有平稳增量；

（3）若令 $\varphi(u)=\mathbf{E}(e^{iu\xi_1})$是 ξ_1 的特征函数，则Y_t的特征函数为

$$\varphi_{Y_t}(u)=\mathbf{E}(e^{iuY_t})=e^{\lambda t(\varphi(u)-1)} \tag{3·48}$$

（4）若$\mathbf{E}(|\xi_1|^2)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(Y_t)=\lambda t\mathbf{E}(\xi_1) \tag{3·49}$$

（5）若$\mathbf{E}(|\xi_1|^2)<\infty$，则

$$\mathrm{Var}(Y_t)=\lambda t\mathbf{E}(\xi_1^2) \tag{3·50}$$

证. （1）任取$0\leqslant t_0<t_1<t_2<\infty$，往证 $Y_{t_2}-Y_{t_1}$ 与 $Y_{t_1}-Y_{t_0}$相互独立。事实上，任取实数x_1，x_2，有

$$P((Y_{t_1}-Y_{t_0})<x_1,\ (Y_{t_2}-Y_{t_1})<x_2)$$

$$=\sum_{0\leqslant i_0\leqslant i_1\leqslant i_2<\infty} P(X_{t_0}=i_0,\ X_{t_1}=i_1,\ X_{t_2}=i_2,$$

$$(Y_{t_1}-Y_{t_0})<x_1,\ (Y_{t_2}-Y_{t_1})<x_2)$$

$$=\sum_{0\leqslant i_0\leqslant i_1\leqslant i_2<\infty} P\Big(X_{t_0}=i_0,\ X_{t_1}=i_1,\ X_{t_2}=i_2,$$

$$\sum_{m=i_0+1}^{i_1}\xi_m<x_1,\ \sum_{n=i_1+1}^{i_2}\xi_n<x_2\Big)$$

$$=\sum_{0\leqslant i_0\leqslant i_1\leqslant i_2<\infty} P(X_{t_0}=i_0,\ X_{t_1}-X_{t_0}=i_1-i_0,$$

$$X_{t_2}-X_{t_1}=i_2-i_1,\quad \sum_{m=i_0+1}^{i_1}\xi_m,\quad {}_1x<$$

$$\left.\sum_{n=i_1+1}^{i_2}\xi_n<x_2\right)$$

$$=\sum_{0\le i_0\le i_1\le i_2<\infty} P\Bigg(X_{t_0}=i_0,\quad X_{t_1}-X_{t_0}=i_1-i_0,$$

$$\left.\sum_{m=i_0+1}^{i_1}\xi_m<x_1\right)\cdot P\Bigg(X_{t_2}-X_{t_1}=i_2-i_1,$$

$$\left.\sum_{n=i_1+1}^{i_2}\xi_n<x_2\right)$$

$$=\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{i_2}\sum_{i_0=0}^{i_1} P\Bigg(X_{t_0}=i_0,\quad X_{t_1}=i_1,$$

$$\left.\sum_{m=X_{t_0}+1}^{X_{t_1}}\xi_m<x_1\right)\cdot P\Bigg(X_{t_2}-X_{t_1}=i_2-i_1,$$

$$\left.\sum_{n=i_1+1}^{i_2}\xi_n<x_2\right)$$

$$=\sum_{i_2=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{i_2} P\left(X_{t_1}=i_1,\quad \sum_{m=X_{t_0}+1}^{X_{t_1}}\xi_m<x_1\right)$$

$$\cdot P\left(X_{t_2}-X_{t_1}=i_2-i_1,\quad \sum_{n=i_1+1}^{i_2}\xi_n<x_2\right)$$

$$=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=i_1}^{\infty}P\left(X_{t_1}=i_1,\quad \sum_{m=X_{t_0}+1}^{X_{t_1}}\xi_m<x_1\right)$$

$$\cdot P\left(X_{t_2}-X_{t_1}=i_2-i_1,\quad \sum_{n=i_1+1}^{i_2}\xi_n<x_2\right)$$

$$=\sum_{i_1=0}^{\infty}P\left(X_{t_1}=i_1,\quad \sum_{m=X_{t_0}+1}^{X_{t_1}}\xi_m<x_1\right)$$

$$\cdot\sum_{i_2=i_1}^{\infty}P\left(X_{t_2}-X_{t_1}=i_2-i_1,\quad \sum_{n=i_1+1}^{i_2}\xi_n<x_2\right) \tag{3·51}$$

但是

$$\sum_{i_2=i_1}^{\infty}P\left(X_{t_2}-X_{t_1}=i_2-i_1,\quad \sum_{n=i_1+1}^{i_2}\xi_n<x_2\right),$$

$$=\sum_{i_2=i_1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}P\left(X_{t_1}=j,\ X_{t_2}-X_{t_1}=i_2-i_1,\right.$$

$$\left.\sum_{n=i_1+1}^{i_2}\xi_n<x_2\right)$$

$$= \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{t_1}=j,\ X_{t_2}=i_2-i_1+j)$$

$$\cdot P\left(\sum_{n=i_1+1}^{i_2} \xi_n < x_2\right)$$

$$= \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{t_1}=j,\ X_{t_2}=i_2-i_1+j)$$

$$\cdot P\left(\sum_{n=j+1}^{i_2-i_1+j} \xi_n < x_2\right)$$

$$= \sum_{i_2=i_1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P\Bigg(X_{t_1}=j,\ X_{t_2}=i_2-i_1+j,$$

$$\sum_{n=X_{t_1}+1}^{X_{t_2}} \xi_n < x_2\Bigg)$$

$$= \sum_{i_2=i_1}^{\infty} P\left(X_{t_2}-X_{t_1}=i_2-i_1,\quad \sum_{n=X_{t_1}+1}^{X_{t_2}} \xi_n < x_2\right)$$

$$= P\left(X_{t_2}-X_{t_1} \geqslant 0,\quad \sum_{n=X_{t_1}+1}^{X_{t_2}} \xi_n < x_2\right)$$

$$= P\left(\sum_{n=X_{t_1}+1}^{X_{t_2}} \xi_n < x_2\right)$$

$$=P((Y_{t_2}-Y_{t_1})<x_2) \tag{3.52}$$

以 (3.52) 代入 (3.51) 得

$$P((Y_{t_1}-Y_{t_0})<x_1,\ (Y_{t_2}-Y_{t_1})<x_2)$$

$$=\sum_{i_1=0}^{\infty} P(X_{t_1}=i_1,\ (Y_{t_1}-Y_{t_0})<x_1)$$

$$\cdot P((Y_{t_2}-Y_{t_1})<x_2)$$

$$=P((Y_{t_1}-Y_{t_0})<x_1)P((Y_{t_2}-Y_{t_1})<x_2)$$

（1）获证。

（2）和（3）。为证（2）和（3），只须证明对任意 $t>s\geqslant 0$，Y_t-Y_s 的特征函数

$$\mathbf{E}(e^{iu(Y_t-Y_s)})=e^{\lambda(t-s)(\varphi(u)-1)} \tag{3.53}$$

若记$\mathbf{E}(\eta|A)$ 为随机变量 η 关于事件 A 的条件期望，则有

$$\mathbf{E}(e^{iu(Y_t-Y_s)})$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}(e^{iu(Y_t-Y_s)}|X_t-X_s=k)P(X_t-X_s=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}\left(e^{iu\sum\limits_{n=X_s+1}^{X_t}\xi_n}|X_t-X_s=k\right)P(X_t-X_s=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{E}\left(e^{iu\sum\limits_{n=1}^{k}\xi_n}\right)P(X_t-X_s=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}[\mathbf{E}(e^{iu\xi_1})]^k e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi(u)^k e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$$

$$=e^{\lambda(t-s)(\varphi(u)-1)}$$

（2）和（3）获证。

（4）和（5）. 由于 Y_t 的特征函数为

$$\varphi_{Y_t}(u)=e^{\lambda t(\varphi(u)-1)}$$

而 $\varphi(u)$ 是 ξ_1 的特征函数，且 $\mathbf{E}(|\xi_1|^2)<\infty$，所以 $\varphi(u)$ 在O点有二阶导数，从而 $\varphi_{Y_t}(u)$ 在O点有二阶导数，故 $\mathbf{E}(|Y_t|^2)<\infty$（参看［2］第二章定理 5·2），且

$$\mathbf{E}(Y_t)=\frac{1}{i}\left(\frac{d}{du}\varphi_{Y_t}(u)\right)_{u=0}$$

$$=\frac{1}{i}(e^{-\lambda t}e^{\lambda t\varphi(0)}\lambda t\varphi'(0))$$

$$=\frac{1}{i}(\lambda t\mathbf{E}(\xi_1)i)=\lambda t\mathbf{E}(\xi_1)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y_t)&=\mathbf{E}(Y_t^2)-\mathbf{E}(Y_t)^2\\
&=-\left(\frac{d^2}{du^2}\varphi_{Y_t}(u)\right)_{u=0}-(\lambda t\mathbf{E}(\xi_1))^2\\
&=-(e^{-\lambda t}e^{\lambda t\varphi(u)}\\
&\quad[(\lambda t\varphi'(u))^2+\lambda t\varphi''(u)])_{u=0}\\
&\quad-(\lambda t\mathbf{E}(\xi_1))^2\\
&=-(\lambda t\varphi'(0))^2-\lambda t\varphi''(0)-(\lambda t\mathbf{E}(\xi_1))^2\\
&=(\lambda t\mathbf{E}(\xi_1))^2+\lambda t\mathbf{E}(\xi_1^2)-(\lambda t\mathbf{E}(\xi_1))^2\\
&=\lambda t\mathbf{E}(\xi_1^2)
\end{aligned}$$

注意：在复合泊松过程 $\{Y_t=\sum_{n=1}^{X_t}\xi_n,\ t\geqslant 0\}$ 中，如果 $\xi_n\equiv 1$，$(n=1,2\cdots)$，则 $Y_t\equiv X_t$，$(t\geqslant 0)$，这时复合泊松过程 $\{Y_t,\ t\geqslant 0\}$ 变为泊松过程 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$。

例 3·1. 考虑河床上的石头被水流冲击而发生的移动。假设在河床上的一块石头在时刻 $\tau_1<\tau_2<\cdots$ 受到水流的冲击，一般说τ_n皆为随机变量，这里τ_n是石头被第 n 次冲击的时刻，$n=1,2,\cdots$。设在时刻 τ_n 石头被冲击而产生的位移是 ξ_n，则 $\{\xi_n,\ n\geqslant 1\}$ 可近似地视为一串相互独立的具有公共分布的随机变量。如果再假定在 $[0,\ t)$ 时间区间内石头被冲击的次数为X_t，且 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 构成一个强度为 λ 的泊松过程，从而在 $[0,\ t)$ 内石头被冲击 k 次的概率

$$P(X_t=k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

则在 t 时石头因受水流冲击而发生的总位移为

$$Y_t=\sum_{n=1}^{X_t}\xi_n\qquad (t\geqslant 0)$$

若 $\{X_t\}$ 与 $\{\xi_n\}$ 独立，则 $\{Y_t,\ t\geqslant 0\}$ 就是一个复合泊松过程。

例 3·2. 对保险公司准备支付的保险总金额的储备。设某人寿保险公司的保险单持有者在时刻 $\tau_1,\tau_2,\cdots$死亡，其中 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots$，τ_n是随机变量，在时刻 τ_n 死亡的保险单持有者其家属有索取保险金ξ_n的权利。设 $\{\xi_n\}$ 是相互独立的具有公共分布的随机变量，再设在 $[0,\ t)$ 内死亡的个数为 X_t，$\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，则该保险公

司在［0，t）内准备支付的总保险金额为

$$Y_t=\sum_{n=1}^{X_t}\xi_n \qquad (t\geqslant 0)$$

$\{Y_t, \ t\geqslant 0\}$ 就是一个复合泊松过程。

习　　题

3·1．负指数分布是唯一的无记忆分布。称取非负实值的随机变量T是无记忆的，如果对任意正数x和y有

$$P(T\geqslant x+y|T\geqslant x)=P(T\geqslant y)$$

试证：取非负实值的随机变量T是无记忆的充分必要条件是T服从负指数分布，即是

$$P(T\geqslant x)=\begin{cases} e^{-\mu x} & x\geqslant 0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

其中μ为一正数。

（提示：先证定义在［0，∞）上的非负非升的非恒0的实值函数 $f(x)$，若满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，则存在 $\mu\geqslant 0$，使 $f(x)=e^{-\mu x}$）

3·2．考虑例3·2中所定义的复合泊松过程

$$\{Y_t=\sum_{n=1}^{X_t}\xi_n, \ \ t\geqslant 0\},$$

假定 $\lambda=5$，ξ_n服从在1000元到2000元之间的均匀分布，即是ξ_n的分布密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1000} & 当\ 1000\leqslant x\leqslant 2000 \\ 0 & 反之 \end{cases}$$

试求：（1）$\mathrm{E}(Y_t)$；（2）$\mathrm{Var}(Y_t)$；（3）$P(Y_t=0)$；

（4）Y_t的特征函数。

若ξ_n服从下述负指数分布：

$$P(\xi_n < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & x \geqslant 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{1500}$$

试再求上述四问题之解。

3·3. 设 $[0, t)$ 内进入某一计数器的质点的个数为 X_t，$\{X_t, t \geqslant 0\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程。再设到达计数器的每一个质点被记录下来的概率为 p，而Y_t是$[0, t)$内被记录下来的质点数，试求

（1）$\mathbf{E}(Y_t)$；（2）$\mathrm{Var}(Y_t)$；（3）$P(Y_t = 0)$；（4）Y_t的特征函数。

（提示：把 Y_t 考虑为下列复合泊松过程

$$Y_t = \sum_{n=1}^{X_t} \xi_n, \quad \{\xi_n\} \text{ 相互独立，且}$$

$\{\xi_n\}$ 与 $\{X_t\}$ 亦相互独立，$P(\xi_n = 1) = p$，$P(\xi_n = 0) = 1 - p$）

3·4. 设 $\{X_t, t \geqslant 0\}$ 满足定义 3·1 前的条件（1）、（2）、（3）和下列条件：X_t的特征函数

$$\varphi_{X_t}(u) = \mathbf{E}(e^{iuX_t})$$

是 t 的连续函数（$t \geqslant 0$），试证

$$\varphi_{X_t}(u) = (\varphi_{X_1}(u))^t \qquad (t \geqslant 0)$$

从而对每个 $t \geqslant 0$，每个 $r \geqslant 0$，

$$(\varphi_{X_t}(u))^r$$

也是特征函数。

（提示：仿（3·5）式，证明

$$\varphi_{X_{\frac{k}{n}}}(u)=(\varphi_{X_1}(u))^{\frac{k}{n}} \qquad (k,n=1,2,\cdots)$$

再利用 $\varphi_{X_t}(u)$ 是 t 的连续函数可证

$$\varphi_{X_t}(u)=(\varphi_{X_1}(u))^t)$$

3·5. 设 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是以 λ 为强度的泊松过程，令 $p_{i,j}(s,s+t)=P(X_{s+t}=j|X_s=i) \quad s,t\geqslant 0 \quad i,j=0,1,2,\cdots$，试求

$$\lim_{t\to 0+}\frac{p_{i,j}(s,s+t)-p_{i,j}(s,s)}{t} \qquad (s\geqslant 0,\ i,j=0,1\cdots)$$

3·6. 设 X_t 为 $[0,t)$ 内来到某一服务机构的顾客数，再设 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是一个以 λ 为强度的泊松过程。令

$0<\tau_1<\tau_2<\cdots$，τ_n 是第 n 个顾客到来的时刻，再令

$T_1=\tau_1$，$T_2=\tau_2-\tau_1,\cdots$，$T_n=\tau_n-\tau_{n-1} \quad (n\geqslant 2)\cdots$

即 T_n 是从第 $n-1$ 个顾客到来的时刻至第 n 个顾客到来时刻的间距。

试求：τ_n 的分布函数、特征函数、期望与方差。

（提示：$P(X_t\leqslant n-1)=P(\tau_n\geqslant t)$，所以 τ_n 的分布函数为

$$F_{\tau_n}(t)=P(\tau_n<t)=1-P(X_t\leqslant n-1)$$
$$=1-e^{-\lambda t}\left(1+\lambda t+\cdots+\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) \quad (n\geqslant 1) \quad (t>0)$$

τ_n 的密度函数为

$$f_{\tau_n}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases}$$

亦即 $F_{\tau_n}(t)$ 是参数为 n 和 λ 的 Γ—分布。）

§4 条件分布与条件期望

在初等概率论中，我们曾经定义过事件A关于事件B的条件概率

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (\text{当 } P(B)>0 \text{ 时}) \tag{4·1}$$

在这一节中，我们将要给出随机变量Y关于随机变量X的条件期望 $\mathbf{E}(Y|X=x)$ 的定义，并给出它们的一些基本性质。

（一）当X和Y皆为离散型随机变量时

定义4·1．设X和Y是两个离散型随机变量，即是

$$X: \begin{bmatrix} x_k \\ p_k \end{bmatrix}; \ k\in\Gamma_1 \qquad Y: \begin{bmatrix} y_m \\ q_m \end{bmatrix}; \ m\in\Gamma_2 \tag{4·2}$$

其中Γ_1和Γ_2为有限集或可数无穷集，亦即

$$P(X=x_k)=p_k\geqslant 0 \quad \sum_{k\in\Gamma_1} p_k=1 \tag{4·3}$$

$$P(Y=y_m)=q_m\geqslant 0 \quad \sum_{m\in\Gamma_2} q_m=1 \tag{4·4}$$

则定义

$$p_{Y|X}(y|x)\equiv\begin{cases} P(Y=y|X=x) & \text{当 } P(X=x)>0 \\ 0 & \text{当 } P(X=x)=0 \end{cases}$$

称 $p_{Y|X}(y|x)$ 为随机变量Y在 $X=x$ 下的条件分布，当$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$时，定义

$$\mathbf{E}(Y|X=x)=\sum_{m\in\Gamma_2} y_m p_{Y|X}(y_m|x) \tag{4·5}$$

为随机变量Y在$X=x$下的条件期望，简称条件期望。

定理4·1. 设X、Y满足定义4·1的条件。

（1）若$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(Y)=\sum_{k\in\Gamma_1}\mathbf{E}(Y|X=x_k)p_k \tag{4·6}$$

（2）若 $g(x,y)$ 是二元实变实值函数，且使 $g(X,Y)$、$g(x,Y)$ 为随机变量，$\mathbf{E}(|g(X,Y)|)<\infty$，$\mathbf{E}(|g(x,Y)|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(g(X,Y)|X=x)=\mathbf{E}(g(x,Y)|X=x) \tag{4·7}$$

$$\mathbf{E}(g(X,Y))=\sum_{k\in\Gamma_1}\mathbf{E}(g(X,Y)|X=x_k)p_k$$

$$=\sum_{k\in\Gamma_1}\mathbf{E}(g(x_k,Y)|X=x_k)p_k \tag{4·8}$$

特别地，若 $g(x,y)=g_1(x)y$，则（4·7）、（4·8）分别化为

$$\mathbf{E}(g_1(X)Y|X=x)=g_1(x)\mathbf{E}(Y|X=x) \tag{4·7$'$}$$

$$\mathbf{E}(g_1(X)Y)=\sum_{k\in\Gamma_1}\mathbf{E}(g_1(X)Y|X=x_k)p_k$$

$$=\sum_{k\in\Gamma_1}\mathbf{E}(Y|X=x_k)p_k g_1(x_k) \tag{4·8$'$}$$

（3）若X与Y相互独立，$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(Y|X=x_k)=\mathbf{E}(Y),\quad (\text{当}P(X=x_k)>0)\text{。}$$

证。由于

$$Y:\begin{bmatrix} y_0, & y_1, & \cdots \\ q_0, & q_1, & \cdots \end{bmatrix},\qquad P(Y=y_m)=q_m\geqslant 0,\quad \sum_m q_m=1$$

(1) $\mathbf{E}(Y)=\sum_m y_m q_m$

$$=\sum_{m\in\Gamma_2} y_m \sum_{k\in\Gamma_1} P(Y=y_m|X=x_k)P(X=x_k)$$

$$=\sum_{k\in\Gamma_1}\Big(\sum_{m\in\Gamma_2} y_m P(Y=y_m|X=x_k)\Big)p_k$$

$$=\sum_{k\in\Gamma_1}\mathbf{E}(Y|X=x_k)p_k$$

(2) 先证（4·7）

$$\mathbf{E}(g(X,Y)|X=x_k)$$

$$=\sum_{n\in\Gamma_1}\sum_{m\in\Gamma_2} g(x_n,\ y_m)P(X=x_n,Y=y_m|X=x_k)$$

$$=\sum_{m\in\Gamma_2} g(x_k,\ y_m)P(X=x_k,\ Y=y_m|X=x_k)$$

$=\mathbf{E}(g(x_k,\ Y)|X=x_k)$ （无论 $P(X=x_k)$ 是否大于0）

而当 $x\bar{\in}\{x_k\}$时，（4·7）左右两边皆为0。总之（4·7）恒成立。

由（4·6）、（4·7）可得（4·8）。

而（4·7）′和（4·8）′乃（4·7）和（4·8）之特例，故(4·7)′和（4·8）′成立。

（3）若X与Y相互独立，则

$$P(X=x_k,\ Y=y_m)=P(X=x_k)P(Y=y_m)$$

所以由定义有

$$\mathbf{E}(Y|X=x_k)=\sum_{m\in\Gamma_2} P(Y=y_m|X=x_k)y_m$$

$$=\sum_{m\in\Gamma_2}\frac{P(X=x_k)P(Y=y_m)}{P(X=x_k)}y_m=\mathbf{E}(Y)$$

注意．（4·6）乃初等概率论中全概公式之推广。事实上，若取$Y=I_A$，其中I_A为1当A发生，I_A为0当A不发

生，则

$$P(A)=\mathbf{E}(Y)$$

取 $B_k=\{X=x_k\}$，则$\{B_k\}$为一串两两互斥之事件，且$\bigcup_k B_k$为必然条件，（4·6）化为

$$P(A)=\sum_n P(A|B_n)P(B_n)$$

例4·1。设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$为 n 个相互独立的随机变量且具有公共分布：

$$P(X_i=1)=p, \qquad P(X_i=0)=q=1-p$$

令$S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$，试求$P(S_n=\text{偶数})=P_n=?$

解。$P_n=P(S_n=\text{偶数})$

$$=P(S_n=\text{偶数}|X_1=0)P(X_1=0)$$
$$+P(S_n=\text{偶数}|X_1=1)P(X_1=1)$$

$$=P\left(\sum_{i=2}^{n}X_i=\text{偶数}|X_1=0\right)q$$

$$+P\left(\sum_{i=2}^{n}X_i=\text{奇数}|X_1=1\right)p$$

$$=P\left(\sum_{i=2}^{n}X_i=\text{偶数}\right)q$$

$$+P\left(\sum_{i=2}^{n}X_i=\text{奇数}\right)p$$

$$
\begin{aligned}
&= P(S_{n-1}=\text{偶数})q + P(S_{n-1}=\text{奇数})p \\
&= P_{n-1}q + (1-P_{n-1})p \\
&= (q-p)P_{n-1} + p \\
&= (q-p)[(q-p)P_{n-2}+p]+p \\
&= \cdots \\
&= p + p(q-p) + p(q-p)^2 + \cdots \\
&\quad + p(q-p)^{n-2}(q-p)^{n-1}P_1 \\
&= p + p(q-p) + p(q-p)^2 + \cdots + p(q-p)^{n-2} \\
&\quad + (q-p)^{n-1}q \\
&= p\left(\frac{1-(q-p)^n}{1-(q-p)}\right) + q(q-p)^{n-1} \\
&= \frac{p}{1-(q-p)} + \left(q - \frac{p}{1-(q-p)}\right)(q-p)^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(q-p)^n
\end{aligned}
$$

（最后一个等式用到了 $p+q=1$）

例4·2。令 X_t 是在［0，t）内进入某一个电话交换台的呼唤次数，再设每一次呼唤能打通电话的概率为 p，且不同的呼唤之间是否能打通电话是彼此独立的，每次呼唤是否能打通电话与 X_t 也相互独立，若 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是一个以 λ 为强度的泊松过程，令 Y_t 是 $[0,t)$ 内打通电话的次数，则 $\{Y_t,\ t\geqslant 0\}$ 是一个以 λp 为强度的泊松过程。

证。由假设，$\{Y_t, t\geqslant 0\}$ 满足定义3·1的第（3）个条件——独立增量。所以，为了证明 $\{Y_t,\ t\geqslant 0\}$ 是一个以 λp 为强度的泊松过程，只须证明：对任何 $t>s\geqslant 0$，任何非负整数 k，有

$$
P(Y_t - Y_s = k) = e^{-\lambda p(t-s)}\frac{(\lambda p(t-s))^k}{k!} \tag{4·9}
$$

事实上，

$$P(Y_t-Y_s=k\,|\,X_t-X_s=n)=C_k^n p^k(1-p)^q$$

$$(k=0,1,2,\cdots,\ n) \tag{4·10}$$

且

$$P(X_t-X_s=n)=e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!} \tag{4·11}$$

所以

$$P(Y_t-Y_s=k)=\sum_{n=k}^{\infty}P(Y_t-Y_s=k\,|\,X_t-X_s=n)$$

$$\cdot P(X_t-X_s=n)$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}C_k^n p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda(t-s)}}{k!}(\lambda p(t-s))^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p)(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$=\frac{(\lambda p(t-s))^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}e^{\lambda(1-p)(t-s)}$$

$$=e^{-\lambda p(t-s)}\frac{(\lambda p(t-s))^k}{k!} \tag{4·12}$$

例4·3. 设 $X_0\equiv n_0$，$X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n}\xi_{n+1}^{(i)}$ $(n\geqslant 0)$

$\{\xi_n^{(i)}$，$i\geqslant 1$，$n\geqslant 1\}$ 是一族相互独立具有公共分布的随机变量，$p_k=P(\xi_n^{(i)}=k)$，$(k\geqslant 0$，$i\geqslant 1$，$n\geqslant 1)$，$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$，μ

$$=\sum_{k=0}^{\infty} kp_k=\mathbf{E}(\xi_n^{(i)})<\infty$$ 亦即 $\{X_n, n\geqslant 0\}$是定义2·2中所说的分枝过程。则 $\mathbf{E}(X_n)=n_0\mu^n \quad (n\geqslant 0)$

此结论我们曾在§2中论明过。现在，利用条件期望的概念，亦可证明此结论。事实上，

$$\mathbf{E}(X_n)=n_0\mu^n$$

当 $n=0$ 时显然成立。设 $n=k$ 时上式成立，则当$n=k+1$时有

$$\mathbf{E}(X_{k+1})=\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{X_k}\xi_{k+1}^{(i)}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{X_k}\xi_{k+1}^{(i)}\,|\,X_k=m\right)P(X_k=m)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m}\xi_{k+1}^{(i)}\right)P(X_k=m)=\sum_{m=0}^{\infty}m\mu P(X_k=m)$$

$$=\mu\mathbf{E}(X_k)=n_0\mu^{k+1}$$

定义 4·1 给出了随机变量Y对一个随机变量X的条件分布及条件期望。类似地，Y对N个随机变量X_1，X_2，…，X_N的条件分布及条件期望也可给出如下：

定义 4·1′. 设Y、X_1、X_2，…，X_N都是离散型随机变量，即是

$$X_i:\begin{bmatrix} x_k^{(i)} \\ p_k^{(i)} \end{bmatrix};\ k\in\Gamma_1^{(i)}$$

$$P(X^{(i)}=x_k^{(i)})=p_k^{(i)}\geqslant 0$$

$$\sum_{k\in\Gamma_1^{(i)}} p_k^{(i)}=1 \qquad (i=1,\cdots,N)$$

$$Y: \begin{bmatrix} y_m \\ q_m \end{bmatrix}, \quad m\in\Gamma_2$$

$$P(Y=y_m)=q_m\geqslant 0$$

$$\sum_{m\in\Gamma_2} q_m=1$$

其中$\Gamma_1^{(i)}$，Γ_2皆为有限集或可数无穷集。称

$$p_{Y|(X_1,\cdots,X_N)}(y|x_1,\cdots,x_N)$$
$$\equiv\begin{cases} P(Y=y|X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N) & \text{当}P(X_1=x_1,\cdots X_N=x_N)>0 \\ 0 & \text{反之} \end{cases}$$

为Y在$X_1=x_1,\cdots$，$X_N=x_N$下的条件分布，而当$\mathbf{E}(|Y|)\vee\infty$时称

$$\mathbf{E}(Y|X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N)$$
$$\equiv\sum_{m\in\Gamma_2} y_m p_{Y|(X_1,\cdots,X_N)}(y_m|x_1,\cdots,x_N)$$

为Y在 $X_1=x_1,\cdots$，$X_N=x_N$下的条件期望。

对于$\mathbf{E}(Y|X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N)$亦有类似于定理4·1的结果，我们在此就不再赘述了，读者可以作为练习证明。

（二）当X、Y是连续型随机变量

设（X,Y）为二维连续型随机变量，$f(x,y)$为其联合密度函数，即是

$$P(X<x,Y<y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)dsdt \quad x,y\in(-\infty,\infty)$$

其中：$f(s,t)$ 是二元非负可积函数，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)dsdt=1$$

再令

$f_X(s)$、$f_Y(t)$ 分别为 X 和 Y 的密度函数，即是

$$f_X(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)dt \qquad f_Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(s,t)ds$$

或者

$$P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(s)ds \quad P(Y<y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt$$

再令

$$C=\{s: f_X(s)>0,\ s\in(-\infty,\ \infty)\}$$

类似于离散型的随机变量的场合，我们将要定义类似(4·4)和(4·5)的条件密度函数和条件期望。

定义4·2。设 X、Y、$f(s,t)$、$f_X(s)$、$f_Y(t)$、C 如上所定义。称

$$f_{Y|X}(t|s)\equiv\begin{cases} f(s,t)/f_X(s) & \text{当 } s\in C, t\in(-\infty,\infty) \\ 0 & \text{当 } s\bar{\in} C, t\in(-\infty,\infty) \end{cases} \tag{4·13}$$

为 Y 在 $X=s$ 下的条件密度函数。

若 $\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则称

$$\mathbf{E}(Y|X=s)\equiv\int_{-\infty}^{\infty} t f_{Y|X}(t|s)dt \quad s\in(-\infty,\infty) \tag{4·14}$$

为Y在$X=s$下的条件期望。

类似于定理4·1，我们有

定理4·2. 设X、Y、$f(s,t)$、$f_X(s)$、$f_Y(t)$、C、$f_{Y|X}(t|s)$如定义4·2所定义。

（1）若$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(Y|X=x)f_X(x)dx \qquad (4\cdot 15)$$

（2）若$g(x)$是一元实变实值函数，且使$\mathbf{E}(|g(X)Y|)<\infty$，又$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(g(X)Y|X=x)=g(x)\mathbf{E}(Y|X=x)$$

$$\mathbf{E}(g(X)Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(g(X)Y|X=x)f_X(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(Y|X=x)g(x)f_X(x)dx \qquad (4\cdot 16)$$

（3）若X与Y相互独立，$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(Y|X=x)=\mathbf{E}(Y) \quad (x\in C) \qquad (4\cdot 17)$$

证. 仿定理4·1，读者可以作为练习自证。

类似定义4·1′，我们给出

定义4·2′. 设$(X_1, X_2,\cdots, X_N, Y)$是$N+1$维连续型随机变量，$f(x_1,x_2,\cdots,x_N, y)$是其联合密度函数，即是

$$P(X_1<x_1,\cdots, X_N<x_N, Y<y)$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_N}\cdots\int_{-\infty}^{y}f(s_1,\cdots,s_N,t)ds_1\cdots ds_N dt,$$

$x_1, x_2,\cdots, x_N, y\in(-\infty, \infty)$

其中 $f(s_1,\cdots,s_N,t)$ 是 $N+1$ 元非负可积函数，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(s_1,\cdots,s_N,t)ds_1\cdots ds_N dt=1$$

再令 $X=(X_1,\cdots,X_N)$，$f_X(s_1,\cdots,s_n)$ 和 $f_Y(t)$ 分别为 X 和 Y 的密度函数，即是

$$f_X(s_1,\cdots,s_N)=\int_{-\infty}^{\infty}f(s_1,\cdots,s_N,t)dt$$

$$f_Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(s_1,\cdots,s_N,t)ds_1\cdots ds_N$$

或者

$$F(X_1<x_1,\cdots,X_N<x_N)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_N}f_X(s_1,\cdots,s_N)ds_1\cdots ds_N$$

$$P(Y<y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(t)dt$$

再令

$C_N=\{(s_1,\cdots,s_N):f_X(s_1,\cdots,s_N)>0\quad s_1,\cdots,s_N\in(-\infty,\infty)\}$

称

$$f_{Y|X}(t|s_1,\cdots,s_N)\equiv\begin{cases}f(s_1,\cdots,s_N,t)/f_X(s_1,\cdots,s_N) & \text{当 }(s_1,\cdots,s_N)\in C_N\\ & t\in(-\infty,\infty)\\ 0 & \text{当 }(s_1,\cdots s_N)\overline{\in} C_N\\ & t\in(-\infty,\infty)\end{cases}\tag{4·18}$$

为 Y 在 $X_1=s_1,\cdots,X_N=s_N$ 下的条件密度函数。

若 $\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则称

$$\mathbf{E}(Y|X_1=s_1,\cdots,X_N=s_N)$$

$$\equiv\int_{-\infty}^{\infty}tf_{Y|X}(t|s_1,\cdots,s_N)dt \quad s_1,\cdots,s_N\in(-\infty,\infty) \tag{4·19}$$

为 Y 在 $X_1=s_1,\cdots,X_N=s_N$ 下的条件期望。

对于 $\mathbf{E}(Y|X_1=s_1,\cdots,X_N=s_1)$ 亦有类似于定理 4·2 的结果，我们在此就不再赘述了。

（三）一般情形

定理4·3. 设 Y，$X_1,\cdots$，X_N 皆为随机变量，$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则存在唯一一个随机变量 Z，满足：

（1） Z 可表为

$$Z=h(X_1,\cdots,X_N);$$

（2）对任何 N 元有界实变实值函数 $g(x_1,\cdots,x_N)$，只要 $g(X_1,\cdots,X_N)$ 也是随机变量，必有

$$\mathbf{E}(Zg(X_1,\cdots,X_N))=\mathbf{E}(Yg(X_1,\cdots,X_N))$$

特别地取 $g(x_1,\cdots,x_n)\equiv1$，（对一切 $x_i\in(-\infty,\infty)$，$i=1,\cdots,N$），则上式变为

$$\mathbf{E}(Z)=\mathbf{E}(Y)$$

定义4·3. 我们称 $Z=h(X_1,\cdots,X_N)$ 为 Y 在 $X_1,\cdots,X_N$ 下的条件期望，记之为 $Z=\mathbf{E}(Y|X_1,\cdots,X_N)$。而 $\mathbf{E}(Y|X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N)$ 定义为 $h(x_1,\cdots,x_N)$。

附注1. 定理4·3即所谓的拉东—尼古丁（Radon—Nikodym）定理，此定理的证明已超出本书的要求范围，故我们不证了。

附注2．这里我们对任意随机变量$Y, X_1, \cdots, X_N$，定义了$\mathbf{E}(Y|X_1=x_1, \cdots, X_N=x_N)$，而在（一）、（二）中分别对离散情形和连续情形定义过$\mathbf{E}(Y|X_1=x_1, \cdots, X_N=x_N)$。（一）、（二）是（三）的特例。因此就存在一个相容性的问题，即是当$(Y, X_1, \cdots, X_N)$为$N+1$维离散型随机变量时，定义4·3定义出的$\mathbf{E}(Y|X_1=x_1, \cdots, X_N=x_N)$与定义4·1′中定义出的
$\mathbf{E}(Y|X_1=x_1, \cdots, X_N=x_N)$是否一样？当$(Y, X_1, \cdots, X_N)$是$N+1$维连续型随机变量时，定义4·3中定义出的$\mathbf{E}(Y|X_1=x_1, \cdots, X_N=x_N)$与定义4·2′中定义出的$\mathbf{E}(Y|X_1=x_1, \cdots, X_N=x_N)$是否一样？事实上，这确实是一样的。读者可以自行验证之。

定理4·4． 设$Y, X_1, \cdots, X_N$为随机变量，$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$。

（1）若$X=(X_1, \cdots, X_N)$是离散型的，即是

$$P(X_1=x_{1,k}, \cdots, X_N=x_{N,k})=p_k \quad k\in \Gamma$$

$p_k\geqslant 0$，$\sum\limits_{k\in\Gamma} p_k=1$，$\Gamma$是有限集或可数无穷集，则

$$\mathbf{E}(Y)=\sum_{k\in\Gamma}\mathbf{E}(Y|X_1=x_{1,k}, \cdots, X_N=x_{N,k})p_k$$

（2）若$X=(X_1, \cdots, X_N)$是连续型的，$f(x_1, \cdots, x_N)$是其联合密度函数，则

$$\mathbf{E}(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(Y|X_1=x_1, \cdots, X_N=x_N)f(x_1, \cdots, x_N)\,dx_1\cdots dx_N$$

（3）若$g(x_1, \cdots, x_N)$是N元实变实值函数，且使$\mathbf{E}(|g(X_1, \cdots, X_N)Y|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(g(X_1,\cdots,X_N)Y\mid X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N)$$
$$=g(x_1,\cdots,x_N)\mathbf{E}(Y\mid X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N)$$

证。略。

定义4·4. 设 $X_1,\cdots,X_N$ 是任意N个随机变量，A是一个事件，$Y=I_A=\begin{cases}1 & \text{当}A\text{发生}\\ 0 & \text{反之}\end{cases}$，则定义

$$P(A\mid X_1,\cdots,X_N)=\mathbf{E}(I_A\mid X_1,\cdots,X_N)$$

自然地，定义

$$P(A\mid X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N)=\mathbf{E}(I_A\mid X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N)$$

（四）条件期望的简单性质

由于

$$\mathbf{E}(Y\mid X_1,\cdots,X_N)\mid X_1=x_1,\cdots,X_N=x_1$$
$$=\mathbf{E}(Y\mid X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N) \qquad (4\cdot20)$$

所以研究 $\mathbf{E}(Y\mid X_1,\cdots,X_N)$ 的性质与研究 $\mathbf{E}(Y\mid X_1=x_1,\cdots,X_N=x_N)$ 的性质是一样的。但书写起来，$\mathbf{E}(Y\mid X_1,\cdots,X_N)$ 简便一些，所以下面我们介绍条件期望的性质时，以 $\mathbf{E}(Y\mid X_1,\cdots,X_N)$ 作对象。

性质1．设C为任一实数，$X_1,\cdots,X_N$为N个随机变量，则

$$\mathbf{E}(C\mid X_1,\cdots,X_N)=C \qquad (4\cdot21)$$

性质2，设 $C_1,\cdots,C_M$为M个实数，$Y_1,\cdots,Y_M$; $X_1,\cdots,X_N$皆为随机变量，且 $\mathbf{E}(|Y_i|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{M}C_iY_i\mid X_1,\cdots,X_N\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{M}C_i\mathbf{E}(Y_i\mid X_1,\cdots,X_N) \qquad (4\cdot22)$$

性质3．设 Y_1，Y_2，$X_1,\cdots,X_N$ 皆为随机变量，$Y_1 \geqslant Y_2$，$\mathbf{E}(|Y_i|)<\infty,(i=1,2)$，则

$$\mathbf{E}(Y_1|X_1,\cdots,X_N) \geqslant \mathbf{E}(Y_2|X_1,\cdots,X_N) \qquad (4\cdot23)$$

性质4．设 Y，$X_1,\cdots,X_N$ 皆为随机变量，$Y \geqslant 0$，则

$$\mathbf{E}(Y|X_1,\cdots,X_N) \geqslant 0 \qquad (4\cdot24)$$

性质5．设 Y，$X_1,\cdots$，X_N 皆为随机变量，$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则

$$|\mathbf{E}(Y|X_1,\cdots,X_N)| \leqslant \mathbf{E}(|Y|\,|X_1,\cdots,X_N) \qquad (4\cdot25)$$

性质6．设 $Y,X_1,\cdots,X_N,X_{N+1},\cdots,X_{N+L}$ 皆为随机变量，$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y|X_1,\cdots,X_N,\ X_{N+1},\cdots,X_{N+L})|X_1,\cdots,X_N)$$
$$=\mathbf{E}(Y|X_1,\cdots,X_N) \qquad (4\cdot26)$$

性质7．设 $X_1,\cdots,X_N$，$Y,Y_1,Y_2,\cdots$ 皆为随机变量，$|Y_i| \leqslant |Y|$，$(i=1,2,\cdots)$，$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y_0$，则

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(Y_n|X_1,\cdots,X_N)$$
$$=\mathbf{E}(Y_0|X_1,\cdots,X_N) \qquad (4\cdot27)$$

性质8．若随机变量 Y 与 $\{X_1,\cdots,X_N\}$ 独立，则

$$\mathbf{E}(Y|X_1,\cdots,X_N)=\mathbf{E}(Y) \qquad (4\cdot28)$$

性质9．若 Y，$X_1,\cdots,X_N$、$g(X_1,\cdots,X_N)$ 皆为随机变量，且 $\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，$\mathbf{E}(|Yg(X_1,\cdots,X_N)|)<\infty$，则

$$\mathbf{E}(Yg(X_1,\cdots,X_N)|X_1,\cdots,X_N)$$
$$=g(X_1,\cdots,X_N)\mathbf{E}(Y|X_1,\cdots,X_N)$$

这些性质，我们就不在此一一证明了。

例4·4．（定理4·4的应用）设 $\{T_n,\ n \geqslant 1\}$ 是一串相互独立具有共同的负指数分布的随机变量，其密度函数为 $f(t)$

$=\lambda e^{-\lambda t}$或0，视 $t\geqslant 0$ 或 <0 而定。令$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}T_k$，试证τ_n的密度函数为

$$p_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}\qquad (n\geqslant 1)\qquad (4\cdot 29)$$

证. 对n作归纳法。当 $n=1$ 时，(4·29) 显然成立。设 $n=m$ 时结论成立，往证 $n=m+1$ 时 (4·29) 亦成立。事实上，任取 $t\geqslant 0$，由定理4·4有

$$P(\tau_{m+1}<t)=\int_0^\infty P(\tau_{m+1}<t\,|\,\tau_m=s)p_m(s)ds$$

$$=\int_0^\infty P(\tau_m+T_{m+1}<t\,|\,\tau_m=s)p_m(s)ds$$

$$=\int_0^\infty P(T_{m+1}<t-s\,|\,\tau_m=s)p_m(s)ds$$

$$=\int_0^\infty P(T_{m+1}<t-s)p_m(s)ds$$

$$=\int_0^t P(T_{m+1}<t-s)p_m(s)ds$$

$$=\int_0^t [1-e^{-\lambda(t-s)}]\frac{\lambda(\lambda s)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda s}ds$$

$$=\int_0^{\lambda t}\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}e^{-u}du-\int_0^t e^{-\lambda t}\frac{\lambda(\lambda s)^{m-1}}{(m-1)!}ds$$

$$=\int_0^{\lambda t}\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}e^{-u}du-e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!}\qquad (4\cdot 30)$$

但是

$$\int_0^{\lambda t}\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}e^{-u}du=-\frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda t}$$

$$+\int_0^{\lambda t}\frac{u^{m-2}}{(m-2)!}e^{-u}du$$

$$=\cdots=1-e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!}+\cdots+\frac{(\lambda t)^1}{1!}+1\right) \quad (4\cdot31)$$

所以

$$P(\tau_{m+1}<t)=1-e^{-\lambda t}\left(\frac{(\lambda t)^m}{m!}+\frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda t)^1}{1!}+1\right) \quad (t\geqslant0) \qquad (4\cdot32)$$

显然

$$P(\tau_{m+1}<t)=0 \quad (\text{当 } t<0) \qquad (4\cdot33)$$

把（4·32）、（4·33）对 t 求微商即发现τ_{m+1}的密度函数为

$$p_{m+1}(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^m}{m!} & \text{当 } t\geqslant0\\ 0 & \text{当 } t<0\end{cases}$$

归纳法完成。例4·4得证。

习　　题

4·1. 设X和Y皆为服从强度为λ的泊松分布的随机变量，即是

$$P(X=k)=P(Y=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,2,\cdots$$

再设X与Y相互独立，试求

$$P(X=k|X+Y=n) \quad (0\leqslant k\leqslant n)$$

（提示：先证明

$$P(X+Y=n)=e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^n}{n!} \qquad n=0,1,2,\cdots)$$

4·2. 设 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，试证：对任何 $0<s<t$，均有

$$P(X_s=k\mid X_t=n)=C_k^n\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}\quad(0\leqslant k\leqslant n)$$

其中 C_k^n 为 n 个元素中取 k 个的组合数。

4·3. 设 $\{X_t^{(1)}, t\geqslant 0\}$、$\{X_t^{(2)}, t\geqslant 0\}$ 是两个相互独立的泊松过程，它们的强度分别为 λ_1 和 λ_2，试证：对任何 $0\leqslant k\leqslant n$，有

$$P(X_t^{(1)}=k\mid X_t^{(1)}+X_t^{(2)}=n)=C_k^n p^k q^{n-k}$$

其中

$$p=\frac{1}{1+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}}\quad q=1-p$$

4·4. 假定进入中国上空的流星的个数构成一个泊松过程，且平均每年进入10000个，每个流星在大气中未烧完而以陨石落于地面的概率为0.0001。设 W 是一个月内落于中国地面的陨石数，试求 $\mathbf{E}(W)$、$\mathrm{Var}(W)$ 和 $P(W\geqslant 2)$。

（提示：令 X_t 是 t 年内进入中国上空的流星的个数，则有

$$P(X_t=k)=e^{-10000t}\frac{(10000t)^k}{k!}$$

$$P(W=j\mid X_{\frac{1}{12}}=k)=C_j^k p^j(1-p)^{k-j}\quad(0\leqslant j\leqslant k,$$

$p=0.0001$））

4·5. 设随机变量族 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 具有独立增量，即是对任何 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$，

$$X_{t_1}-X_{t_0},\cdots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$$

相互独立。再设 $\mathbf{E}(X_t)=m(t)$ 存在 $(t\geqslant 0)$

试证：对任何 $0<s_1<s_2<\cdots<s_k<s_{k+1}$，有

$$\mathbf{E}(X_{s_{k+1}}|X_{s_1},\cdots,X_{s_k})$$
$$=X_{s_k}+m(s_{k+1})-m(s_k)$$

（上式对一般情形皆对，读者可仅就 X_t 取非负整值来证明）

4·6. 设 (X_1, X_2) 服从二维正态分布，即是其联合密度函数为

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\rho\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-m_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)\frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\varphi\left\{\frac{x_2-m_2-\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)\rho(x_1-m_1)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right\}$$

其中

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

为标准正态密度函数，$m_i=\mathbf{E}(X_i)$，$\sigma_i^2=\mathrm{Var}(X_i)$，$(i=1,2)$，$\rho$ 是 X_1 与 X_2 的相关系数。

试证：

(A) X_1 的密度函数为

$$f_{X_1}(x_1)=\frac{1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{x_1-m_1}{\sigma_1}\right)$$

(B) X_2 在 $X_1=x_1$ 下的条件密度函数为

$$f_{X_2|X_1}(x_2|x_1)=\frac{f(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

$$=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\varphi\left(\frac{x_2-m_2-\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)\rho(x_1-m_1)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

(C) $\mathbf{E}(X_2|X_1=x_1)=m_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-m_1)$

(D) $\mathbf{E}((X_2-\mathbf{E}(X_2|X_1))^2|X_1=x_1)$
$=\sigma_2^2(1-\rho^2)$

4·7. 设Y是离散型随机变量，$P(Y=y_k)=p_k, p_k\geqslant 0$，

$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1$，$\mathbf{E}(|Y|)<\infty$，而X是任一随机变量，试证

$$\mathbf{E}(Y|X)=\sum_{k=0}^{\infty}y_kP(Y=y_k|X)$$

§5 更新过程

在这一节中，我们将研究一类新的过程——更新过程。先看几个例子。

例5·1.（设备的更新）。考虑一个设备（它可能是一个电灯泡，也可能是一个机器零件，……等等），它一直使用到损坏为止，然后再用一个同类设备来替换（或更新）。假定这类设备的使用时间的长度（或称寿命）是一个正值随机变量T，而且相继投入使用的设备的寿命为T_1，T_2,…。一般说，可以假定T_1，T_2，…是一串相互独立而且具有与T的分布一样的公共分布的随机变量。再令$\tau_1=T_1$，$\tau_2=T_1+T_2$，…，$\tau_n=T_1+T_2+\cdots+T_n$,…，$X_t$是$[0, t)$内更换的设备的个数，则$\tau_n$是更换第$n$个设备的时间，且$\{X_t, t\geqslant 0\}$与$\{\tau_n, n=1, 2,\cdots\}$有如下关系

$$\{X_t<n\}=\{\tau_n\geqslant t\} \quad (t\geqslant 0, n=1, 2,\cdots) \qquad (5\cdot 1)$$

$\{X_t, t\geqslant 0\}$与$\{T_n, n=1, 2, \cdots\}$有如下关系

T_n是X_t（作为t的函数）的第n个跳跃点与第$n-1$个跳跃点之间的长度。

例5·2. 设想许多轮船进入一个码头。假定τ_n是第n条轮船进入码头的时刻，$n=1, 2,\cdots$，$0<\tau_1<\tau_2<\cdots$，再令$T_1=\tau_1$，$T_2=\tau_2-\tau_1$,…，$T_n=\tau_n-\tau_{n-1}$,…，X_t是$[0, t)$内进入码头的轮船的总共的条数。若$\{T_n, n=1, 2, \cdots\}$是相互独立具有公共分布的随机变量，则$\{X_t, t\geqslant 0\}$亦具

有例5·1中的$\{X_t, t\geqslant 0\}$的概率特性。

从上述两个例子，我们抽象出更新过程的数学定义。

定义5·1。设$\{X_t, t\geqslant 0\}$是一族取非负整数的随机变量，$\{T_n, n=1, 2, \cdots\}$是一串相互独立具有公共分布的取正数的随机变量，$\tau_1=T_1$，$\tau_2=T_1+T_2$，…，$\tau_n=T_1+T_2+\cdots+T_n$，…，而且满足：

$$\{X_t<n\}=\{\tau_n\geqslant t\} \quad (t\geqslant 0, n=1, 2, \cdots) \tag{5·1}$$

即是

$$\{X_t=n\}=\{\tau_{n+1}\geqslant t>\tau_n\} \quad (t\geqslant 0, n=1,2,\cdots) \tag{5·2}$$

则称$\{X_t, t\geqslant 0\}$是一个更新过程，称τ_n为其第n个更新时刻，T_n为第n个更新间距，$n=1, 2, \cdots$。

比更新过程稍广一点的概念是"延迟的更新过程"。所谓$\{X_t, t\geqslant 0\}$是延迟的更新过程，就是把定义5·1的关于$\{T_n, n=1, 2,\cdots\}$的要求稍为放宽：$\{T_n\}$相互独立，$\{T_n, n=2, 3,\cdots\}$具有公共分布，而T_1可以与T_2具有不同的分布。

定义5·2。(更新方程式)。设$f(t)$和$h(t)$是定义在$[0, \infty)$上的已知的实值函数，如果$g(t)$满足

$$g(t)=h(t)+\int_0^t g(t-s)f(s)ds \quad t\in[0, \infty) \tag{5·3}$$

则称$g(t)$满足(f, h)更新方程式。

定理5·1。设$\{X_t, t\geqslant 0\}$是一个更新过程，$\{T_n, n=1, 2,\cdots\}$是其更新间距，令T_n的密度函数及分布函数分别为$f(x)$和$F(x)$，

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt$$

再令

$$m(t)=\mathbf{E}(X_t) \quad (t\geqslant 0)$$

为X_t的期望，则 $m(t)$ 满足 (f, F) 更新方程式，即是

$$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-s)f(s)ds \quad t\in[0, \infty) \qquad (5\cdot4)$$

证。由定理4·4可得

$$m(t)=\int_0^\infty \mathbf{E}(X_t|T_1=s)f(s)ds \quad (t\geqslant0) \qquad (5\cdot5)$$

而由（5·1）式有

$$\{X_t=0\}=\{X_t<1\}=\{\tau_1\geqslant t\}=\{T_1\geqslant t\} \qquad (5\cdot6)$$

所以

$$P(X_t=0|T_1=s)=1 \quad (\text{当 } s>t\geqslant0) \qquad (5\cdot7)$$

因此由习题4·7有

$$\mathbf{E}(X_t|T_1=s)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X_t=k|T_1=s)$$

$$=0 \quad (\text{当 } s>t\geqslant0) \qquad (5\cdot8)$$

而当 $s\leqslant t$，$k\geqslant1$时

$$P(X_t=k|T_1=s)=P\left(\sum_{i=1}^{k+1}T_i\geqslant t>\sum_{i=1}^{k}T_i|T_1=s\right)$$

$$=P\left(\sum_{i=2}^{k+1}T_i\geqslant t-s>\sum_{i=2}^{k}T_i|T_1=s\right)$$

$$=P\left(\sum_{i=2}^{k+1}T_i\geqslant t-s>\sum_{i=2}^{k}T_i\right)$$

$$=P\left(\sum_{i=1}^{k}T_i\geqslant t-s>\sum_{i=1}^{k-1}T_i\right)$$

$$=P(X_{t-s}=k-1) \tag{5·9}$$

所以当 $s\leqslant t$ 时

$$\mathbf{E}(X_t|T_1=s)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X_t=k|T_1=s)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X_t=k|T_1=s)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X_{t-s}=k-1)k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P(X_{t-s}=n)$$

$$=1+m(t-s)\quad(s\leqslant t) \tag{5·10}$$

以 (5·8)、(5·10) 代入 (5·5) 得

$$m(t)=\int_0^t(1+m(t-s))f(s)ds$$

$$=F(t)+\int_0^t m(t-s)f(s)ds$$

定义5·3. 设 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是一个更新过程，T_n和τ_n分别为 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 的第 n 个更新间距和第 n 个更新时刻，$n=1,\ 2,\cdots$。称

$$\gamma(t)\equiv\tau_{X_t+1}-t \tag{5·11}$$

为时刻 t "还活着"的物体的"剩余寿命"，简称"剩余寿命"。

下面我们来解释为什么称 $\gamma(t)$为剩余寿命。由 (5·2) 可知：当 $X_t=n$ 时，有

$$\gamma(t)=\tau_{X_t+1}-t=\tau_{n+1}-t\quad \tau_{n+1}\geqslant t>\tau_n$$

因此若以例 5·1 为背景，则 τ_n 是第 n 次更换设备的时刻，$T_{n+1}=\tau_{n+1}-\tau_n$是第 n 次更换来的设备的"寿命"，而 τ_{n+1}

$-t$ (当 $\tau_{n+1} \geqslant t > \tau_n$ 时) 正是第 n 次更换来的设备从时刻 t 算起的剩余寿命。

剩余寿命 $\gamma(t)$，在更新过程的研究中，起着很重要的作用。下面我们证明剩余寿命的分布也满足某一更新方程式。

定理5·2. 设 $\{X_t, t \geqslant 0\}$、$\{T_n, n \geqslant 1\}$，$\{\tau_n, n \geqslant 1\}$ 和 $\gamma(t)$ 的意义如定义5·3。令 $f(x)$、$F(x)$ 分别为 T_n 的密度函数和分布函数，再令

$$g(t, x) = P(\gamma(t) \geqslant x) \tag{5·12}$$

则对每一个固定的 x，$g(t, x)$ 视为 t 的函数，满足下列更新方程式

$$g(t, x) = 1 - F(t+x) + \int_0^t g(t-s, x) f(s) ds \tag{5·13}$$

亦即，若写 $g(t, x) = g_x(t)$，$h_x(t) = 1 - F(t+x)$，则 $g_x(t)$ 满足 (f, h_x) 更新方程式。

证。由定理4·4及定义4·4得

$$P(\gamma(t) \geqslant x) = \int_0^\infty P(\gamma(t) \geqslant x \mid T_1 = s) f(s) ds \tag{5·14}$$

但是

当 $T_1 = s$，$s > t + x$ 时，$\{\gamma(t) \geqslant x\}$ 必然发生；

当 $T_1 = s$，$t < s < t + x$ 时，$\{\gamma(t) \geqslant x\}$ 不能发生，

所以

$$P(\gamma(t) \geqslant x \mid T_1 = s) = \begin{cases} 1 & \text{当 } s > t + x \\ 0 & \text{当 } t < s < t + x \end{cases} \tag{5·15}$$

下面我们计算 $s < t$ 时 $P(\gamma(t) \geqslant x \mid T_1 = s)$ 的值。由(5·11)关于 $\gamma(t)$ 的定义，当 $s < t$ 时有

$$\begin{aligned} & P(\gamma(t) \geqslant x \mid T_1 = s) \\ = & P(\tau_{X_t+1} - t \geqslant x \mid T_1 = s) \end{aligned}$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{X_t+1} T_i - t \geqslant x \mid T_1 = s\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=2}^{X_t+1} T_i - (t-s) \geqslant x \mid T_1 = s\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=2}^{m+1} T_i - (t-s) \geqslant x,\ X_t = m \mid T_1 = s\right)$$

$$\underline{\underline{(5\cdot 2)}} \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=2}^{m+1} T_i - (t-s) \geqslant x, \tau_{m+1} \geqslant t > \tau_m \mid T_1 = s\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=2}^{m+1} T_i - (t-s) \geqslant x,\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{m+1} T_i \geqslant t > \sum_{i=1}^{m} T_i \mid T_1 = s\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=2}^{m+1} T_i - (t-s) \geqslant x,\right.$$

$$\left.\sum_{i=2}^{m+1} T_i \geqslant (t-s) > \sum_{i=2}^{m} T_i \mid T_1 = s\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=2}^{m+1} T_i - (t-s) \geqslant x,\right.$$

$$\sum_{i=2}^{m+1} T_i \geqslant (t-s) > \sum_{i=2}^{m} T_i \Big)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P\Big(\sum_{i=1}^{m} T_i - (t-s) \geqslant x,$$

$$\sum_{i=1}^{m} T_i \geqslant (t-s) > \sum_{i=1}^{m-1} T_i \Big)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P(\tau_m - (t-s) \geqslant x,\ \tau_m \geqslant (t-s) > \tau_{m-1})$$

$$\overset{(5\cdot 2)}{=\!=} \sum_{m=1}^{\infty} P(\tau_m - (t-s) \geqslant x,\ X_{t-s} = m-1)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P(\tau_{X_{t-s}+1} - (t-s) \geqslant x,\ X_{t-s} = m-1)$$

$$= P(\tau_{X_{t-s}+1} - (t-s) \geqslant x)$$

$$= P(\gamma(t-s) \geqslant x) \quad (s<t) \qquad (5\cdot 16)$$

以（5·15)、(5·16）代入（5·14）得

$$P(\gamma(t) \geqslant x) = \int_{t+x}^{\infty} f(s)ds + \int_0^t P(\gamma(t-s) \geqslant x) f(s)ds$$

$$= 1 - F(t+x) + \int_0^t P(\gamma(t-s) \geqslant x) f(s) ds$$

此即（5·13）成立。定理5·2证毕。

由于剩余寿命 $\gamma(t)$ 的分布函数为

$$F_{\gamma(t)}(x) = P(\gamma(t) < x) = 1 - P(\gamma(t) \geqslant x)$$

而 $P(\gamma(t)\geqslant x)$ 满足更新方程式（5·13），所以欲求 $\gamma(t)$ 的分布函数，只须解更新方程式（5·13）即可。

我们为什么要研究剩余寿命 $\gamma(t)$ 及其分布函数 $F_{\gamma(t)}(x)$ 呢？因为它与更新过程 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 的分布有密切关系。

定理5·3. 设 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是一个更新过程，$\gamma(t)$ 是剩余寿命，$F_{\gamma(t)}(x)$ 是 $\gamma(t)$ 的分布函数，考虑 t，$v\geqslant 0$，令 $X_{t+}=\lim\limits_{u\downarrow t} X_u$

（1）若 $F_{\gamma(t)}(x)$ 有密度 $f_{\gamma(t)}(x)$，则

$$P(X_{t+v}-X_t=n)$$

$$=\begin{cases} P(\gamma(t)\geqslant v)=\int_v^\infty f_{\gamma(t)}(s)ds & (n=0) \\ \int_0^v P(X_{v-s}=n-1)f_{\gamma(t)}(s)ds & (n\geqslant 1) \end{cases} \tag{5·17}$$

（2）若 $\gamma(t)$ 是离散型随机变量

$$P(\gamma(t)=a_{t,m})=p_{t,m} \quad (m\geqslant 0,\ t\in[0,\ \infty))$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{t,m}=1 \quad (t\in[0,\ \infty))$$

则

$$P(X_{t+v}-X_t=n)$$

$$\begin{cases} P(\gamma(t)\geqslant v)=\sum\limits_{a_{t,m}\geqslant v} p_{t,m} & (n=0) \\ \sum\limits_{a_{t,m}<v} P(X_{v-a_{t,m}}=n-1)p_{t,m} & (n\geqslant 1) \end{cases} \tag{5·18}$$

（3）若 $\gamma(t)$ 是一般的随机变量，则

$$P(X_{t+v}-X_t=n)$$

$$=\begin{cases} P(\gamma(t)\geqslant v) & (n=0) \\ \int\limits_{[0,v)} P(X_{v-s}=n-1)dF_{\gamma(t)}(s) & (n\geqslant 1) \end{cases} \tag{5·19}$$

证。只证(1)。由 $\gamma(t)$ 的定义及 (5·2) 有

$$\{\gamma(t)\geqslant v\}=\{\tau_{X_t+1}-t\geqslant v\}$$

$$=\bigcup_{m=0}^{\infty}\{\tau_{m+1}-t\geqslant v,\ X_t=m\}$$

$$\stackrel{(5·2)}{=\!=}\bigcup_{m=0}^{\infty}\{\tau_{m+1}-t\geqslant v,\ \tau_{m+1}\geqslant t>\tau_m\}$$

$$=\bigcup_{m=0}^{\infty}\{\tau_{m+1}\geqslant t+v>\tau_m,\ \tau_{m+1}\geqslant t>\tau_m\}$$

$$\stackrel{(5·2)}{=\!=}\bigcup_{m=0}^{\infty}\{X_{t+v}=m,\ X_t=m\}$$

$$=\{X_{t+v}-X_t=0\}\qquad (v\geqslant 0)$$

此即 (5·17) 当 $n=0$ 时成立。

当 $n\geqslant 1$ 时：令 $A_n=\{X_{t+v}-X_t=n\}$，则有

$$P(A_n)=\int_0^{\infty}P(A_n|\gamma(t)=s)f_{\gamma(t)}(s)ds \tag{5·20}$$

若 $s<v$，则当 $\gamma(t)=s$（即 $\tau_{X_t+1}=t+s$）时，τ_{X_t}、t、$t+s$、$t+v$ 之大小位置如图 5—1

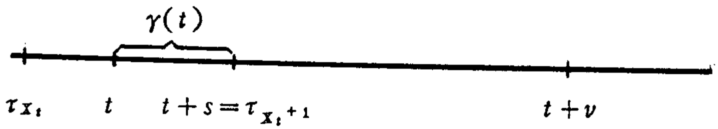


图 5—1

亦即

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t+v}-X_t=n\,|\,\gamma(t)=s)\\
&=P(X_{t+v}-X_t=n\,|\,\tau_{X_t+1}=s+t)\\
&=P(\tau_{X_t+n+1}\geqslant t+v>\tau_{X_t+n}\,|\,\tau_{X_t+1}=s+t)\\
&=P\left(\sum_{i=1}^{X_t+n+1}T_i\geqslant t+v>\sum_{i=1}^{X_t+n}T_i\,\middle|\,\sum_{i=1}^{X_t+1}T_i=s+t\right)\\
&=P\left(\sum_{i=X_t+2}^{X_t+n+1}T_i\geqslant(t+v)-(t+s)>\sum_{i=X_t+2}^{X_t+n}T_i\right)\\
&=P\left(\sum_{i=1}^{n}T_i\geqslant v-s>\sum_{i=1}^{n-1}T_i\right)\\
&=P(X_{v-s}=n-1)\quad(n\geqslant 1)
\end{aligned}
\tag{5·21}
$$

若 $s\geqslant v$，则当 $\gamma(t)=s$（即 $\tau_{X_t+1}=t+s$）时，τ_{X_t}、t、$t+v$，$t+s$ 之大小位置如图 5—2

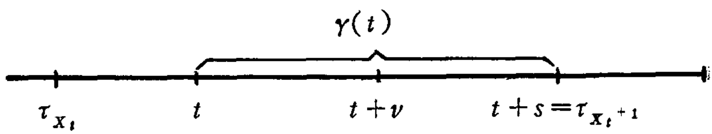


图 5—2

亦即在 $[t,\ t+v)$ 内没有设备更新，故

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t+v}-X_t=n\,|\,\gamma(t)=s)\\
&=P(\text{在}[t,\ t+v)\text{内更新 } n \text{ 次}\,|\,\gamma(t)=s)\\
&=0\qquad(n\geqslant 1)
\end{aligned}
\tag{5·22}
$$

以（5·21）、（5·22）代入（5·20）即得（5·17）第二个等式。(1)获证。

下面我们研究更新方程式（5·3）的解。我们不打算对

一般的 f 和 h，求（5·3）的解，而只对某些特殊的 f 和 h 来解（5·3）。

定理5·4。若 $f(x)$ 是负指数分布的密度函数，即是存在正的常数 λ，使

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x} \qquad x\geq 0$$

$h(x)$ 有连续导函数 $h'(x)$ $(x\geq 0)$，则 (f, h) 更新方程式：

$$g(t)=h(t)+\int_0^t g(t-s)\lambda e^{-\lambda s}ds \quad (t\geq 0) \tag{5·23}$$

的解为

$$g(t)=g(0)+\int_0^t e^{-\lambda s}\frac{d}{ds}\left(e^{\lambda s}h(s)\right)ds \tag{5·24}$$

证。令$G(t)=e^{\lambda t}g(t)$，$H(t)=e^{\lambda t}h(t)$，则由(5·23)得 $G(t)$ 满足

$$\begin{aligned}G(t)&=e^{\lambda t}\left(h(t)+\int_0^t g(t-s)\lambda e^{-\lambda s}ds\right)\\&=H(t)+\int_0^t g(t-s)\lambda e^{\lambda(t-s)}ds\\&=H(t)+\lambda\int_t^0 g(u)e^{\lambda u}(-du)\\&=H(t)+\lambda\int_0^t G(s)ds\end{aligned} \tag{5·25}$$

所以

$$G'(t)-\lambda G(t)=H'(t) \tag{5·26}$$

而

$$\begin{aligned}G'(t)-\lambda G(t)&=e^{\lambda t}g'(t)+\lambda e^{\lambda t}g(t)-\lambda e^{\lambda t}g(t)\\&=e^{\lambda t}g'(t)\end{aligned} \tag{5·27}$$

由（5·26）、（5·27）得

$$g'(t)=e^{-\lambda t}H'(t)$$

所以

$$g(t)=\int_0^t e^{-\lambda s}H'(s)ds+g(0)$$

此即更新方程式（5·23）之解必为(5·24)。显然易证(5·24)是（5·23）之解。

定理5·5. 设 $\{X_t, t\geq 0\}$ 是一个更新过程，T_n是其第 n 个更新间距，$\gamma(t)$ 是剩余寿命，若 T_n服从负指数分布：

$$P(T_n<x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

则 $\gamma(t)$ 的分布函数与T_n的分布函数一样。

证。由定理5·2中的（5·13）式得

$$P(\gamma(t)\geq x)=e^{-\lambda(t+x)}+\lambda\int_0^t P(\gamma(t-s)\geq x)e^{-\lambda s}ds \tag{5·28}$$

令

$$g_x(t)=P(\gamma(t)\geq x),\ h_x(t)=e^{-\lambda(t+x)},\ f(t)=\lambda e^{-\lambda t},$$

则（5·28）说明：对任何固定的 $x\geq 0$，视 $g_x(t)$、$h_x(t)$ 为 t 的函数，$g_x(t)$ 满足（f，h_x）更新方程式，因此，由定理5·4知

$$\begin{aligned}P(\gamma(t)\geq x)&=g_x(t)\\&=g_x(0)+\int_0^t e^{-\lambda s}\frac{d}{ds}(e^{\lambda s}h_x(s))ds\\&=P(\gamma(0)\geq x)+\int_0^t e^{-\lambda s}\frac{d}{ds}(e^{\lambda s}e^{-\lambda(s+x)})ds\\&=P(\gamma(0)\geq x)\end{aligned} \tag{5·29}$$

而由定理5·3及（5·1）式得

$$\begin{aligned}P(\gamma(0)\geq x)&=P(X_x=0)=P(T_1\geq x)\\&=e^{-\lambda x}\qquad (x\geq 0)\end{aligned} \tag{5·30}$$

由（5·29）、(5·30）得

$$P(\gamma(t)<x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & (x\geqslant 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

在§3中，我们曾经研究过泊松过程，人们自然会问：更新过程与泊松过程有何联系？下面的定理回答了这一问题。

定理5·6．设$\{X_t, t\geqslant 0\}$是更新过程，$\gamma(t)$是其剩余寿命，T_n是其第n个更新间距，若T_n服从下列负指数分布

$$P(T_n<x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{5·31}$$

其中$\lambda>0$。则$\{X_t, t\geqslant 0\}$是一个强度为λ的泊松过程。

证．若能证明对任何$t\geqslant s\geqslant t'\geqslant s'\geqslant 0$，任何非负整数$k$和$n$，均有

$$P(X_t-X_s=n|X_{t'}-X_{s'}=k)=e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^n}{n!}$$

则按泊松过程的定义，$\{X_t, t\geqslant 0\}$必为泊松过程。固定s，令

$$Y_u=X_{s+u}-X_s \qquad (u\geqslant 0)$$

$$T_1^*=\gamma(s) \tag{5·32}$$

$$T_n^*=\tau_{X_s+n}-\tau_{X_s+n-1} \qquad (n\geqslant 2)$$

即是T_n^*是s以后$\{X_t, t\geqslant 0\}$的第n个更新间距$(n\geqslant 2)$。如在数轴上标出它们的位置，则有下列次序

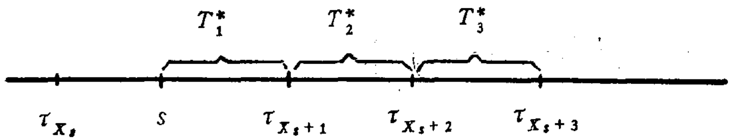


图5—3

由于 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是更新过程，所以 $\{T_n^*\ ,n\geqslant 2\}$ 相互独立，且具有（5·31）的公共分布。

事实上，对任意正整数$N\geqslant 2$，任意实数x_2，…，x_N，有

$$P\left(\bigcap_{n=2}^{N}\{T_n^*<x_n\}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}P\left(\bigcap_{n=2}^{N}\{\tau_{X_s+n}-\tau_{X_s+n-1}<x_n\}\cap\{X_s=m\}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}P\left(\bigcap_{n=2}^{N}\{\tau_{m+n}-\tau_{m+n-1}<x_n\}\cap\{\tau_{m+1}\geqslant s>\tau_m\}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}P\left(\bigcap_{n=2}^{N}\{T_{m+n}<x_n\}\cap\left\{\sum_{i=1}^{m+1}T_i\geqslant s>\sum_{i=1}^{m}T_i\right\}\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\prod_{n=2}^{N}P(T_{m+n}<x_n)\right)P\left(\sum_{i=1}^{m+1}T_i\geqslant s>\sum_{i=1}^{m}T_i\right)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\prod_{n=2}^{N}P(T_n<x_n)\right)P\left(\sum_{i=1}^{m+1}T_i\geqslant s>\sum_{i=1}^{m}T_i\right)$$

$$=\left(\prod_{n=2}^{N}P(T_n<x_n)\right)\sum_{m=0}^{\infty}P(X_s=m)$$

$$=\prod_{n=2}^{N}P(T_n<x_n) \tag{5·33}$$

对任意 $2\leqslant M\leqslant N$，在（5·33）中令 $x_n\to\infty$，（$n\neq M$，$2\leqslant n\leqslant N$）得

$$P(T_M^*<x_M)=P(T_M<x_M) \tag{5·34}$$

由（5·33）和（5·34）得

$$P\left(\bigcap_{n=2}^{N}\{T_n^*<x_n\}\right)=\prod_{n=2}^{N}P(T_n^*<x_n) \tag{5·35}$$

（5·35）说明 $\{T_n^*,\ n\geqslant2\}$ 相互独立，（5·34）说明 T_n^* 的分布函数与 T_n 的分布函数一样，（$n\geqslant2$）。定理5·5说明$T_1^*=\gamma(s)$ 与T_n的分布函数一样。至于 T_1^* 与 $\{T_n^*,\ n\geqslant2\}$ 相互独立，仿照（5·35）可以证明之。总之，我们证明了：$\{T_n^*,\ n\geqslant1\}$ 是相互独立的，且T_n^*与 T_n的分布函数一样，即是服从（5·31）中的负指数分布。

下面证明

$$\{Y_u=n\}=\left\{\sum_{i=1}^{n+1}T_i^*\geqslant u>\sum_{i=1}^{n}T_i^*\right\} \tag{5·36}$$

若能如此，则 $\{Y_u,\ u\geqslant0\}$ 是一个更新过程，且其更新间距T_n^*的分布函数与 $\{X_t,\ t\geqslant0\}$ 的更新间距 T_n的分布函数一样。

令

$$\tau_k^* = \sum_{n=1}^{k} T_n^* \qquad (k \geqslant 1)$$

则

$$\tau_k^* = \sum_{n=2}^{k}(\tau_{X_s+n} - \tau_{X_s+n-1}) + \gamma(s)$$

$$= (\tau_{X_s+k} - \tau_{X_s+1}) + (\tau_{X_s+1} - s)$$

$$= \tau_{X_s+k} - s \qquad (k \geqslant 1) \tag{5·37}$$

所以由（5·37）得

$$\{Y_u = n\} = \{X_{s+u} - X_s = n\}$$

$$= \bigcup_{m=0}^{\infty}\{X_{s+u} = n+m,\ X_s = m\}$$

$$= \bigcup_{m=0}^{\infty}\{\tau_{n+m+1} \geqslant s+u > \tau_{n+m},\ X_s = m\}$$

$$= \bigcup_{m=0}^{\infty}\{\tau_{X_s+n+1} \geqslant s+u > \tau_{X_s+n},\ X_s = m\}$$

$$\overset{(5·37)}{=} \bigcup_{m=0}^{\infty}\{\tau_{n+1}^* \geqslant u > \tau_n^*,\ X_s = m\}$$

$$= \{\tau_{n+1}^* \geqslant u > \tau_n^*\}$$

（5·36）获证。总之我们证明了 $\{Y_u,\ u \geqslant 0\}$ 是一个更新过程，其更新间距 T_n^* 服从（5·31）所定义的负指数分布。所以对任何$u \geqslant 0$，$t' \leqslant s$，有

$$
\begin{aligned}
&P(X_{s+u}-X_s=n|X_{t'}-X_{s'}=k)\\
&=P(Y_u=n|X_{t'}-X_{s'}=k)\\
&=P(Y_u=n)\\
&=P(\tau_{n+1}^*\geqslant u>\tau_n^*)\\
&=P(\tau_{n+1}\geqslant u>\tau_n)\\
&=P(X_u=n) \qquad (5\cdot38)
\end{aligned}
$$

（倒数第二个等式用到了 $\{T_n^*\}$（$\{T_n\}$）相互独立，T_n^*与T_n的分布函数一样。）

由于T_n服从参数为λ的负指数分布，$\{T_n\}$相互独立，所以 $\tau_n=\sum_{k=1}^{n}T_k$ 服从参数为（n，λ）的Γ分布，即是τ_n的密度函数为

$$
f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n)}\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases} \qquad (5\cdot39)
$$

其中 $\Gamma(n)=(n-1)!$ 是Γ函数。

而

$$
\begin{aligned}
&P(X_u=n)=P(\tau_{n+1}\geqslant u>\tau_n)\\
&=P(\tau_{n+1}\geqslant u)-P(\tau_n\geqslant u)\\
&=1-P(\tau_{n+1}<u)-1+P(\tau_n<u)\\
&=\int_0^u f_n(x)dx-\int_0^u f_{n+1}(x)dx\\
&=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^u x^{n-1}e^{-\lambda x}dx-\frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\int_0^u x^n e^{-\lambda x}dx\\
&=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^u x^{n-1}e^{-\lambda x}dx
\end{aligned}
$$

$$-\frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\left(-\frac{1}{\lambda}u^n e^{-\lambda u}+\frac{n}{\lambda}\int_0^u x^{n-1}e^{-\lambda x}dx\right)$$

$$=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^u x^{n-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$+\frac{(\lambda u)^n}{n!}e^{-\lambda u}-\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^u x^{n-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$=e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^n}{n!}\qquad(n\geqslant 1)\qquad(5\cdot 40)$$

$$P(X_u=0)=P(\tau_1\geqslant u)=1-P(\tau_1<u)$$

$$=1-\int_0^u f_1(x)dx$$

$$=1-\int_0^u \lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=e^{-\lambda u}\qquad(5\cdot 41)$$

以（5·41）、（5·40）代入（5·38）得

$$P(X_{s+u}-X_s=n\,|\,X_{t'}-X_s=k)=e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^n}{n!}$$

$(n\geqslant 0,\ k\geqslant 0,\ 0\leqslant t'\leqslant s,\ u\geqslant 0)$。

至此，定理证毕。

下面我们研究更新间距服从Γ分布的更新过程。

定理5·7. 设 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是更新过程，其更新间距T_n服从参数为 $(k,\ \lambda)$ 的Γ分布 $(k\geqslant 1)$，即是 T_n 的密度函数为

$$f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{(k-1)!}(\lambda x)^{k-1}e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}\qquad(5\cdot 42)$$

令 $p_t(n)=P(X_t=n)\quad(t\geqslant 0,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$

$$\Psi(t, z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) z^n \tag{5·43}$$

为 X_t 的矩母函数。则

$$p_t(n)=\sum_{m=nk}^{(n+1)k-1} \frac{1}{m!}(\lambda t)^m e^{-\lambda t} \tag{5·44}$$

$$\Psi(t,z)=1+\left(\frac{z-1}{z}\right)\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r}{1-z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r}\Big[1-$$

$$e^{-\lambda t\left(1-z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r\right)}\Big] \tag{5·45}$$

其中

$$\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{k}}, \quad i=\sqrt{-1} \tag{5·46}$$

证。由于 T_n 服从参数为（k，λ）的 Γ 分布，而 $\{T_n,$ $n\geqslant1\}$ 相互独立，所以

$$\tau_N=\sum_{i=1}^{N} T_i$$

服从参数为（kN，λ）的 Γ 分布。因此仿（5·40）可证

$$P(X_t=n)=P(\tau_{n+1}\geqslant t>\tau_n)$$

$$=P(\tau_{n+1}\geqslant t)-P(\tau_n\geqslant t)$$

$$=\int_t^{\infty} f_{(n+1)k}(x)dx-\int_t^{\infty} f_{nk}(x)dx$$

$$=\int_t^{\infty}\frac{\lambda}{((n+1)k-1)!}(\lambda x)^{(n+1)k-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$-\int_t^{\infty}\frac{\lambda}{(nk-1)!}(\lambda x)^{nk-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\sum_{m=nk}^{(n+1)k-1}\frac{1}{m!}(\lambda t)^m e^{-\lambda t} \tag{5·47}$$

令

$$G(t,\ z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}P(\tau_n<t)\quad(t>0,|z|<1) \tag{5·48}$$

则

$$\Psi(t,\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n P(X_t=n)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n(P(\tau_{n+1}\geqslant t)-P(\tau_n\geqslant t))$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n(P(\tau_n<t)-P(\tau_{n+1}<t))$$

$$=1+(z-1)G(t,\ z) \tag{5·49}$$

而τ_n服从参数为（kn, λ）的Γ分布，所以若令$z=y^k$，则

$$G(t,\ z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}\int_0^t f_{kn}(x)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}y^{k(n-1)}\int_0^t\frac{(\lambda x)^{kn-1}}{(kn-1)!}\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=y^{1-k}\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda xy)^{nk-1}}{(nk-1)!}\right)dx \tag{5·50}$$

但是

$$\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon^r e^{u\varepsilon^r}$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon^r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(u\varepsilon^r)^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}(\varepsilon^r)^{n+1} \tag{5·51}$$

而当 $\nu=lk$ 为 k 的整数倍时

$$\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}(\varepsilon^r)^{\nu}=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}e^{2lr\pi i}=1 \tag{5·52}$$

当 ν 不等于 k 的整数倍时，用几何级数计算得

$$\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}(\varepsilon^r)^{\nu}=\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}e^{\frac{2r\nu\pi i}{k}}$$

$$=\frac{1}{k}\ \frac{1-\left(e^{\frac{2\nu\pi i}{k}}\right)^k}{1-e^{\frac{2\nu\pi i}{k}}}=0 \tag{5·53}$$

以（5·52）和（5·53）代入（5·31）得

$$\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon^r e^{u\varepsilon^r}$$

$$=\sum_{(n+1)\in\{lk \mid l=1,2,\cdots\}}\frac{u^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^{nk-1}}{(nk-1)!} \tag{5·54}$$

以（5·54）代入（5·50）得

$$G(t,z)=y^{1-k}\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\left(\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\varepsilon^r e^{\lambda x y \varepsilon^r}\right)dx$$

$$=y^{1-k}\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{\varepsilon^r}{1-y\varepsilon^r}\left(1-e^{-\lambda t(1-y\varepsilon^r)}\right) \tag{5·55}$$

以（5·55）代入（5·49）并注意 $y^k=z$ 可得

$$\Psi(t,\ z)=1+(z-1)G(t,\ z)$$

$$=1+(z-1)z^{\frac{1}{k}-1}\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{\varepsilon^r}{1-z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r}\left(1-e^{-\lambda t\left(1-z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r\right)}\right)$$

$$=1+\frac{z-1}{z}\frac{1}{k}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r}{1-z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r}\left(1-e^{-\lambda t\left(1-z^{\frac{1}{k}}\varepsilon^r\right)}\right)$$

定理5·7获证。

系1。在定理 5·7中，若 $k=1$，即是T_n服从负指数分布：

$$P(T_n<x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

则

$$P(X_t=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\quad (n\geqslant 0)$$

X_t 矩的母函数由（5·45）得

$$\Psi(t,z)=1+\frac{z-1}{z}\ \frac{z}{1-z}\left[1-e^{-\lambda t(1-z)}\right]$$

$$=e^{\lambda t(z-1)} \qquad (|z|\leqslant 1)$$

系2．在定理5·7中，若 $k=2$，则 $\varepsilon^0=1$，$\varepsilon^1=-1$，从而 X_t 的矩母函数由（5·45）得

$$\Psi(t,z)=1+\frac{z-1}{z}\ \frac{1}{2}\left[\frac{z^{\frac{1}{2}}}{1-z^{\frac{1}{2}}}\left(1-e^{-\lambda t\left(1-z^{\frac{1}{2}}\right)}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{z^{\frac{1}{2}}}{1+z^{\frac{1}{2}}}\left(1-e^{-\lambda t\left(1+z^{\frac{1}{2}}\right)}\right)\right]$$

$$=1+\frac{z-1}{2z}\left[\frac{z^{\frac{1}{2}}\left(1+z^{\frac{1}{2}}\right)}{1-z}\left(1-e^{-\lambda t\left(1-z^{\frac{1}{2}}\right)}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{z^{\frac{1}{2}}\left(1-z^{\frac{1}{2}}\right)}{1-z}\left(1-e^{-\lambda t\left(1+z^{\frac{1}{2}}\right)}\right)\right]$$

$$=\frac{z-1}{2z}\ \frac{z^{\frac{1}{2}}\left(1+z^{\frac{1}{2}}\right)}{1-z}\left(\ -e^{-\lambda t\left(1-z^{\frac{1}{2}}\right)}\right)$$

$$+\frac{z-1}{2z}\ \frac{z^{\frac{1}{2}}\left(1-z^{\frac{1}{2}}\right)}{1-z}e^{-\lambda t\left(1+z^{\frac{1}{2}}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\lambda t}\left[e^{\lambda t\sqrt{z}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{z}}\right)+e^{-\lambda t\sqrt{z}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{z}}\right)\right]$$

$$=e^{-\lambda t}\left[\cos h(\lambda t\sqrt{z})+\frac{1}{\sqrt{z}}\sin h(\lambda t\sqrt{z})\right] \qquad (5\cdot 56)$$

其中

$$\cos h(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2},\quad \sin h(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}.$$

所以

$$\mathbf{E}(X_t)=\lim_{z\uparrow 1}\frac{d}{dz}\Psi(t,\ z)$$

$$=\lim_{z\uparrow 1}\ e^{-\lambda t}\left(\frac{\frac{1}{2}\lambda t}{\sqrt{z}}\sin h(\lambda t\sqrt{z})\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}\sin h(\lambda t\sqrt{z})+\frac{\frac{1}{2}\lambda t}{z}\cos h(\lambda t\sqrt{z})\right)$$

$$=e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda t(e^{\lambda t}-e^{-\lambda t})}{4}-\frac{e^{\lambda t}-e^{-\lambda t}}{4}+\frac{(e^{\lambda t}+e^{-\lambda t})\lambda t}{4}\right)$$

$$=e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda t e^{\lambda t}}{2}-\frac{e^{\lambda t}-e^{-\lambda t}}{4}\right)$$

$$=\frac{\lambda t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda t} \tag{5·57}$$

$$\mathrm{Var}(X_t)=\lim_{z\uparrow 1}[\Psi''_{z,z}(t,z)+\Psi'_z(t,z)-(\Psi'_z(t,z))^2]$$

$$=\lim_{z\uparrow 1}\Psi''_{z,z}(t,z)+\left(\frac{\lambda t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda t}\right)$$

$$-\left(\frac{\lambda t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda t}\right)^2$$

$$=\frac{1}{8}(3-4\lambda t+2\lambda^2t^2-3e^{-2\lambda t}-2\lambda t e^{-2\lambda t})$$

$$+\left(\frac{\lambda t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2\lambda t}\right)$$

$$-\left(\frac{\lambda^2t^2}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}e^{-4\lambda t}-\frac{\lambda t}{4}+\frac{\lambda t}{4}e^{-2\lambda t}-\frac{1}{8}e^{-2\lambda t}\right)$$

$$=\frac{1}{16}+\frac{\lambda t}{4}-\frac{1}{2}\lambda t e^{-2\lambda t}-\frac{1}{16}e^{-4\lambda t}$$

$$=\frac{\lambda t}{4}-\frac{\lambda t}{2}e^{-2\lambda t}+\frac{1}{4}e^{-\lambda t}\sin h(\lambda t)$$

$$-\frac{1}{4}(e^{-\lambda t}\sin h(\lambda t))^2 \tag{5·58}$$

下面我们介绍更新过程的几个极限定理（仅作介绍，不予证明）。

定理5·8。设 $\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是（可以是迟延的）更新过程，$\{T_1, T_2, \cdots\}$ 是其更新间距所成之序列。

（1）若 $\mu\equiv \mathbf{E}(T_2)<\infty$，则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbf{E}(X_t)}{t}=\frac{1}{\mu} \tag{5·59}$$

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{X_t}{t}=\frac{1}{\mu}\right)=1 \tag{5·60}$$

（2）若 $\mu\equiv \mathbf{E}(T_2)<\infty$，$\sigma^2\equiv \mathrm{Var}(T_2)<\infty$，则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(X_t)}{t}=\frac{\sigma^2}{\mu^3} \tag{5·61}$$

$$\lim_{t\to\infty}P\left(\frac{X_t-\frac{t}{\mu}}{\sqrt{t\sigma^2/\mu^3}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \tag{5·62}$$

其中 x 为任意实数。

（3）若 $\mu=\mathbf{E}(T_2)<\infty$，$T_2$不是"格子点随机变量"（所谓 T_2 是格子点随机变量，意即存在一个实数 a，使 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}P(T_2=ka)=1$。显然整值随机变量是格子点随机变

量），则对任何 $h>0$，有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}(X_{t+h}-X_t)=\frac{h}{\mu} \tag{5·63}$$

习　　题

5·1. 设 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是一个更新过程，T_n是其更新间距，$\tau_n=\sum_{i=1}^{n}T_i$，$(n\geqslant 1)$，再设 $\mathbf{E}(X_t)=m(t)=\lambda t$，$(t\geqslant 0$，$\lambda$ 为正实数）。试求 $\Phi(x)\equiv\mathbf{E}(e^{-xT_n})$ $(x\geqslant 0)$（提示：由于 $\{T_n,\ n\geqslant 1\}$ 是相互独立具有共同分布的随机变量序列，所以

$$\mathbf{E}(e^{-x\tau_n})=\Phi(x)^n$$

而

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}P(X_t=n)n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}P(\tau_{n+1}\geqslant t>\tau_n)n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}n[P(\tau_n<t)-P(\tau_{n+1}<t)]=\sum_{n=1}^{\infty}P(\tau_n<t)$$

从而

$$\int_0^{\infty}e^{-xt}d(\lambda t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(x)^n$$

5·2. 设 $\{X_t, \ t\geqslant 0\}$ 是一个更新过程，T_n 是其更新间距，若 T_n 服从参数为 $(k, \ \lambda)$ 的 Γ 分布，试求 $\mathbf{E}(X_t)$、$\mathrm{Var}(X_t)$。

5·3. 设更新过程 $\{X_t, \ t\geqslant 0\}$ 的更新间距 T_n 服从参数为 $(k, \ \lambda)$ 的 Γ 分布，试求

$$P(X_{1000}<x)$$

的近似值，其中 x 是任一正数。

5·4. 试说明更新过程的一切概率性质均由其更新间距的分布函数所决定。

§ 6　可数状态的马尔可夫链（Ⅰ）
（基本概念）

在此以前，我们曾经研究过“随机徘徊”、“分枝过程”、“泊松过程”、“更新过程”。这些过程的实际背景虽然比较强，但其普遍性是不够的，它们在随机过程的理论中，均属于个别特例。而在这一节中，我们将要研究一类在随机过程中占有主要地位的具有较为普遍意义的随机过程—马尔可夫过程。由于本书的目的仅对随机过程作一浅易的介绍，本节只介绍马尔可夫过程的最简单的特例—可数状态的马尔可夫链。

定义 6·1．设 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个随机变量序列，每个X_n所可能取的值皆属于 E（E是一个可数的实数集合，通常是 $E=\{0,1,2,\cdots\}$）。如果对任何 $n\geqslant1$，任何 $i_0,\ i_1,\ \cdots,\ i_n\in E$，均有

$$P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1},\ \cdots,\ X_1=i_1,\ X_0=i_0)$$
$$=P(X_n=i_n|X_{n-1}=i_{n-1}) \tag{6·1}$$

则称 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个可数状态的马尔可夫链，E称为其状态空间，$\{0,1,2,\cdots\}$称为其时间参数集，$p_{i,j}(m,m+n)\equiv P(X_{m+n}=j|X_m=i)$ 称为其转移概率。特别地，若 $p_{i,j}(m,\ m+n)$ 不依赖于m（对一切 $n\geqslant0$，一切 $i,j\in E$），则说 $\{X_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 为时齐的可数状态的马尔可夫链，这时简记 $p_{i,j}(m,m+n)$ 为 $p_{i,j}(n)$。特别地，记$p_{i,j}=p_{i,j}(1)$，即是 $p_{i,j}$ 是时齐的可数状态的马尔可夫链的（一

步）转移概率。

定理6·1。（等价性定义）设 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 为一个随机变量序列，E 是一个可数的实数集合，每个 X_n 皆取值于 E。则下列陈述等价

（1）$\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个可数状态的马尔可夫链；

（2）对任何 $n\geqslant 1$，任何 $i_0,\ i_1,\cdots,i_n\in E$，（6·1）式成立；

（3）对任何 $n\geqslant 1$，任何严格上升的非负整数列 t_0，t_1，…，t_n，任何 i_0，i_1，…，$i_n\in E$，均有

$$P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\ \cdots,\ X_{t_1}=i_1,\ X_{t_0}=i_0)$$
$$=P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}) \qquad (6\cdot 2)$$

（4）对任何 $n\geqslant 1$，任何严格上升的非负整数列 t_0，t_1，…，t_n，任何 i_0，i_1，…，$i_n\in E$，均有

$$P(X_{t_0}=i_0,\ X_{t_1}=i_1,\cdots,\ X_{t_n}=i_n)$$
$$=\sum_{k\in E}P(X_0=k)P(X_{t_0}=i_0|X_0=k)P(X_{t_1}=i_1|X_{t_0}=i_0)$$
$$\cdots P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}) \qquad (6\cdot 3)$$

（5）对任何 $n\geqslant 1$，$m\geqslant 1$，任何严格上升的非负整数列 t_0，$t_1,\cdots$，t_n，$t_{n+1},\cdots$，t_{n+m}，任何 i_0，i_1，…，i_n，i_{n+1}，…，$i_{n+m}\in E$，均有

$$P(X_{t_0}=i_0,\cdots,\ X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\ X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,$$
$$X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n)$$
$$=P(X_{t_0}=i_0,\ \cdots,\ X_{t_{n-1}}=i_{n-1}|X_{t_n}=i_n)$$
$$\cdot P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n) \qquad (6\cdot 4)$$

（6）对任何 $n\geqslant 1$，$m\geqslant 1$，任何严格上升的非负整数列 t_0，$t_1,\cdots$，t_n，$t_{n+1},\cdots,t_{n+m}$，任何 i_0，$i_1,\cdots$，i_n，

$i_{n+1},\cdots,i_{n+m}\in E$，均有

$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,\ X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n,\ X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\cdots,X_{t_0}=i_0)$$
$$=P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n) \qquad (6\cdot5)$$

注意：(6·1) 是 (6·2) 的特例，(6·2) 是 (6·5) 的特例。而 (6·3)、(6·4)、(6·5) 则是三种典型。

(6·3) 的概率意义：若把0看成初始时刻，则 $\{\mu_k=P(X_0=k),\ k\in E\}$是初始分布，条件概率 $P(X_{t_{j+1}}=i_{j+1}|X_{t_j}=i_j)$ 是转移概率，即是已知过程在时刻 t_j处于状态 i_j的条件下，在时刻t_{j+1}过程转移到i_{j+1}的转移概率。而(6·3)说明 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 的联合分布由初始分布与转移概率所决定。

(6·4) 的概率意义：若把时刻t_n看作"现在"，则t_0，$t_1,\cdots,\ t_{n-1}$就是"过去"，$t_{n+1},\cdots,\ t_{n+m}$就是"将来"，而 (6·4) 说明：知道"现在"处于什么状态以后，"过去"和"将来"是独立的。

(6·5) 的概率意义：若把时刻t_n看作"现在"，t_0,t_1，$\cdots,\ t_{n-1}$看作"过去"，$t_{n+1},\ \cdots,\ t_{n+m}$看作"将来"，则 (6·5)说明：知道"现在"和知道"现在"及以前的历史，对"将来"的预测是等效的。

而定理6·1说明，这三种特性是等价的，它们都可以作为马尔可夫链的特征性质，即它们都可以作为"马氏性"的定义。

证。(3)⇒(4)。设 (3) 成立。则

$$P(X_{t_0}=i_0,\ X_{t_1}=i_1,\ X_{t_n}=i_n)$$
$$=P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\cdots,\ X_{t_0}=i_0)$$
$$\cdot P(X_{t_0}=i_0,\cdots,\ X_{t_{n-1}}=i_{n-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= P(X_{t_n}=i_n \mid X_{t_{n-1}}=i_{n-1}) \cdot P(X_{t_0}=i_0, \\
&\quad \cdots, X_{t_{n-1}}=i_{n-1}) \\
&= \cdots \\
&= P(X_{t_n}=i_n \mid X_{t_{n-1}}=i_{n-1})\, P(X_{t_{n-1}}=i_{n-1} \mid X_{t_{n-2}}=i_{n-2}) \\
&\quad \cdot \cdots \cdot P(X_{t_1}=i_1 \mid X_{t_0}=i_0) P(X_{t_0}=i_0) \\
&= \sum_{k\in E} P(X_0=k) P(X_{t_0}=i_0 \mid X_0=k) P(X_{t_1}=i_1 \mid X_{t_0}=i_0) \\
&\quad \cdots P(X_{t_n}=i_n \mid X_{t_{n-1}}=i_{n-1})
\end{aligned}
$$

此即（4）成立。

（4）⇒（5）。设（4）成立。则

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_0}=i_0, \cdots, X_{t_{n-1}}=i_{n-1}, X_{t_{n+1}}=i_{n+1}, \cdots, \\
&\quad X_{t_{n+m}}=i_{n+m} \mid X_{t_n}=i_n) \\
&= P\left(\bigcap_{s=0}^{n+m}\{X_{t_s}=i_s\}\right) \div P(X_{t_n}=i_n) \\
&= \left(P(X_{t_0}=i_0) \prod_{s=1}^{n+m} P(X_{t_s}=i_s \mid X_{t_{s-1}}=i_{s-1}) \right) \\
&\quad \div P(X_{t_n}=i_n)
\end{aligned} \tag{6·6}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_0}=i_0, \cdots, X_{t_{n-1}}=i_{n-1} \mid X_{t_n}=i_n) \\
&= P\left(\bigcap_{s=0}^{n}\{X_{t_s}=i_s\}\right) \div P(X_{t_n}=i_n) \\
&= \left(P(X_{t_0}=i_0) \prod_{s=1}^{n} P(X_{t_s}=i_s \mid X_{t_{s-1}}=i_{s-1}) \right) \\
&\quad \div P(X_{t_n}=i_n)
\end{aligned} \tag{6·7}
$$

$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,X_{t_{n+m}}=i_{n+m}\mid X_{t_n}=i_n)$$

$$=P\left(\bigcap_{s=n}^{n+m}\{X_{t_s}=i_s\}\right)\div P(X_{t_n}=i_n)$$

$$=\left(P(X_{t_n}=i_n)\prod_{s=n+1}^{n+m}P(X_{t_s}=i_s\mid X_{t_{s-1}}=i_{s-1})\right)$$

$$\div P(X_{t_n}=i_n)$$

$$=\prod_{s=n+1}^{n+m}P(X_{t_s}=i_s\mid X_{t_{s-1}}=i_{s-1}) \tag{6·8}$$

由（6·6)、(6·7）和（6·8）即得（5）成立。

(5)⇒(6)。设（5）成立。令

$$A=\{X_{t_0}=i_0,\cdots,\ X_{t_{n-1}}=i_{n-1}\}$$

$$B=\{X_{t_n}=i_n\}$$

$$C=\{X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\cdots,\ X_{t_{n+m}}=i_{n+m}\}$$

则由(5)成立知

$$P(AC\mid B)=P(A\mid B)P(C\mid B)$$

而

(6·5) 左边 $=P(C\mid AB)=P(ABC)\div P(AB)$

$=(P(AC\mid B)P(B))\div P(AB)$

$=(P(A\mid B)P(C\mid B)P(B))\div P(AB)$

$=P(A\mid B)P(C\mid B)\div\left(\dfrac{P(AB)}{P(B)}\right)$

$=P(C\mid B)=$(6·5)右边

此即（6）成立。

“(6)⇒(3)” 显然成立，因为（3）是(6)的特例。

总之，我们证明了（3）、（4）、（5）、（6）是等价的。又因为“(3)⇒(2)”显然成立，所以若能证“(2)⇒(4)”，则定理获证。我们只对 $n=2$ 来证明“(2)⇒(4)”，对一般的 n，证法完全一样，只不过符号复杂一点而已。

设（2）成立，则

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_0}=i_{t_0},\ X_{t_1}=i_{t_1},\ X_{t_2}=i_{t_2})\\
&=\sum_{\substack{i_s\in E\\ 0\leqslant s\leqslant t_2\\ s\neq t_0,t_1,t_2}} P\Big(X_{t_0}=i_{t_0},X_{t_1}=i_{t_1},X_{t_2}=i_{t_2},X_s=i_s,\ 0\leqslant s\leqslant t_2,\ s\neq t_0,t_1,t_2\Big)\\
&\overset{(2)}{=}\sum_{\substack{i_s\in E\\ 0\leqslant s\leqslant t_2\\ s\neq t_0,t_1,t_2}} P(X_{t_2}=i_{t_2}\mid X_{t_2-1}=i_{t_2-1})P(X_s=i_s,\ 0\leqslant s<t_2)\\
&=\cdots\\
&=\sum_{\substack{i_s\in E\\ 0\leqslant s\leqslant t_2\\ s\neq t_0,t_1,t_2}}\Big(\prod_{u=t_0+1}^{t_2}P(X_u=i_u\mid X_{u-1}=i_{u-1})\Big)P(X_s=i_s,\ 0\leqslant s\leqslant t_0)\\
&=\sum_{\substack{i_s\in E\\ t_0<s<t_2\\ s\neq t_0,t_1,t_2}}\Big(\prod_{u=t_0+1}^{t_2}P(X_u=i_u\mid X_{u-1}=i_{u-1})\Big)P(X_{t_0}=i_0)
\end{aligned}
\tag{6·9}
$$

但是

$$
\begin{aligned}
&P(X_{t_1}=i_{t_1},\ X_{t_0}=i_{t_0})\\
&=P(X_{t_1}=i_{t_1},\ X_{t_0}=i_{t_0})\div P(X_{t_0}=i_{t_0})
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{\substack{i_s \in E \\ t_0 < s < t_1}} P(X_{t_1}=i_{t_1},\ X_{t_0}=i_{t_0},\ X_s=i_s,\ t_0<s<t_1)$$

$$\div P(X_{t_0}=i_{t_0})$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{\substack{i_s \in E \\ t_0 < s < t_1}} \prod_{u=t_0+1}^{t_1} P(X_u=i_u | X_{u-1}=i_{u-1}) \tag{6·10}$$

仿之可证

$$P(X_{t_2}=i_{t_2},\ X_{t_1}=i_{t_1})$$

$$= \sum_{\substack{i_s \in E \\ t_1 < s < t_2}} \prod_{u=t_1+1}^{t_2} P(X_u=i_u | X_{u-1}=i_{u-1}) \tag{6·11}$$

由 (6·9)、(6·10)、(6·11) 得

$$P(X_{t_0}=i_{t_0},\ X_{t_1}=i_{t_1},\ X_{t_2}=i_{t_2})$$

$$=P(X_{t_0}=i_{t_0})P(X_{t_1}=i_{t_1}|X_{t_0}=i_{t_0})P(X_{t_2}=i_{t_2}|X_{t_1}=i_{t_1})$$

总之，我们证明了："(2)⇒(4)" 定理证毕。

下面我们举几个马尔可夫链的例子。

例6·1. 设 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是直线上的整数格子点上的随机徘徊，即是

$$X_n=X_0+\xi_1+\cdots+\xi_n \quad (n\geqslant 1)$$

$\{X_0,\ \xi_1,\xi_2,\cdots\}$ 相互独立，$\{\xi_1,\xi_2,\cdots\}$ 具有公共分布：

$$P(\xi_n=k)=p_k \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k=1$$

则 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个时齐的可数状态的马尔可夫链，其状态空间为 $E=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\}$，其时间参数集为

$\{0,1,2,\cdots\}$，其（一步）转移概率为

$$p_{i,j}=P(X_n=j\mid X_{n-1}=i)$$
$$=P(\xi_n=j-i)=p_{j-i}\quad n\geqslant 1,i,j\in\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}\tag{6·12}$$

事实上，由 $\{X_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\cdots\}$ 相互独立得

$$P(X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,\ X_0=i_0)$$
$$=\frac{P(X_n=i_n,\ X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0)}{P(X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,X_0=i_0)}$$
$$=\frac{P(\xi_n=i_n-i_{n-1},\xi_{n-1}=i_{n-1}-i_{n-2},\cdots,\xi_1=i_1-i_0,X_0=i_0)}{P(\xi_{n-1}=i_{n-1}-i_{n-2},\cdots,\xi_1=i_1-i_0,X_0=i_0)}$$
$$=P(\xi_n=i_n-i_{n-1})$$
$$=P(X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1})\tag{6·13}$$

由（6·13）不仅发现 $\{X_n,n=0,\ 1,\ 2,\cdots\}$ 是可数状态的马尔可夫链，而且它还是时齐的，且其转移概率由（6·12）所决定（因为$P(\xi_n=i_n-i_{n-1})=p_{i_n-i_{n-1}}$）。

例6·2．设 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是分枝过程，即是

$$X_{n+1}=\sum_{i=1}^{X_n}\xi_{n+1}^{(i)}\qquad(n\geqslant 0)$$

$\{X_0,\ \xi_n^{(i)},\ i=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots\}$ 是相互独立具有公共分布的随机变量族，

$$P(\xi_n^{(i)}=k)=p_k\quad(i\geqslant 1,\ n\geqslant 1,\ k\geqslant 0)$$

$$p_k\geqslant 0\qquad\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1\qquad f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k$$

则 $\{X_n,\ n=0,1,\ 2,\cdots\}$ 是时齐的可数状态的马尔可夫链，

其状态空间为 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，其（一步）转移概率

$$p_{i,j}=P(X_n=j\mid X_{n-1}=i)\qquad(n\geqslant1)$$

的矩母函数

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_{i,j}s^j=(f(s))^i$$

证。由于 X_n 只依赖于 $\{\xi_n^{(i)},\ i=1,2,\cdots\}$，而 $\{X_0,\xi_n^{(i)},\ i=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots\}$ 是相互独立的，所以

$$\begin{aligned}
&P(X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1},\ \cdots,\ X_0=i_0)\\
=&P(X_n=i_n,\ X_{n-1}=i_{n-1},\ \cdots,\ X_0=i_0)\\
&\div P(X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,\ X_0=i_0)\\
=&P\left(\sum_{i=1}^{i_{n-1}}\xi_n^{(i)}=i_n,\ X_{n-1}=i_{n-1},\cdots,\ X_0=i_0\right)\\
&\div P(X_{n-1}=i_{n-1},\ \cdots,\ X_0=i_0)\\
=&P\left(\sum_{i=1}^{i_{n-1}}\xi_n^{(i)}=i_n\right)\\
=&P(X_n=i_n\mid X_{n-1}=i_{n-1})
\end{aligned}\qquad(6\cdot14)$$

因此，$\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个可数状态的马尔可夫链，其状态空间为 $E=\{0,1,2,\cdots\}$。而由（6·14）还知

$$P(X_n=j\mid X_{n-1}=i)=P\left(\sum_{i=1}^{i}\xi_n^{(i)}=j\right)=p_{i,j}$$

与 n 无关（因为 $\{\xi_n^{(i)},\ i\geqslant1,n\geqslant1\}$ 相互独立具有相同分布），亦即 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是时齐的。而独立同分布的随机

变量 $\xi_n^{(1)},\cdots,\xi_n^{(i)}$ 的和的矩母函数，等于它们的矩母函数的乘积，此即

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} s^j = (f(s))^i \qquad (6\cdot15)$$

由（6·15）易知

$$\begin{cases} p_{i,j} = \sum\limits_{\sum_{s=1}^{i} j_s = j} \prod\limits_{s=1}^{i} P_{1,j_s} & (i \geqslant 1,\ j \geqslant 0) \\ p_{0,j} = \delta_{0,j} & (j \geqslant 0) \end{cases} \qquad (6\cdot16)$$

此处及今后，恒用

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

例6·3.（排队过程的嵌入马尔可夫链）

设在 $[0,\ t)$ 内来到某个服务机构要求服务的顾客数为 Y_t，而 $\{Y_t,\ t \geqslant 0\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，来到的顾客按先到先服务的规则排成一队逐个被服务，各顾客的服务时间是相互独立的具有共同分布的随机变量，且与 Y_t 亦相互独立。令 X_n 是第 n 个顾客服务完毕那一瞬刻在服务机构前等待服务的顾客的队伍的长度，再令 U 是第 n 个顾客被服务的时间区间中来到服务机构的顾客数，则

$$X_{n+1} = X_n - \delta(X_n) + U_{n+1} \quad (n \geqslant 1) \qquad (6\cdot17)$$

其中 $\delta(x) = 1$（当 $x \neq 0$），$\delta(x) = 0$，（当 $x = 0$）

于是

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, \cdots, X_1 = i_1)$$
$$= P(X_n - \delta(X_n) + U_{n+1} = i_{n+1},\ X_n = i_n, \cdots, X_1 = i_1)$$

$$\div P(X_n=i_n,\cdots, X_1=i_1)$$

$$=P(U_{n+1}=i_{n+1}-i_n+\delta(i_n), X_n=i_n,\cdots,X_1=i_1)$$

$$\div P(X_n=i_n, \cdots, X_1=i_1)$$

$$=P(U_{n+1}=i_{n+1}-i_n+\delta(i_n)) \quad (n\geqslant 1) \qquad (6\cdot 18)$$

（因为U_{n+1}与 $\{X_n, X_{n-1},\cdots, X_1\}$ 相互独立）。

仿之可证

$$P(X_{n+1}=i_{n+1}|X_n=i_n)$$

$$=P(U_{n+1}=i_{n+1}-i_n+\delta(i_n)) \quad (n\geqslant 1) \qquad (6\cdot 19)$$

由（6·18)、(6·19）得知 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一个可数状态的马尔可夫链。由于各顾客的服务时间所服从的分布是一样的，所以

$$P(X_{n+1}=j|X_n=i)$$

$$=P(U_{n+1}=j-i+\delta(i))=p_{i,j}$$

与 n 无关，亦即 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是时齐的。若令U_1的分布为

$$P(U_1=m)=k_m \qquad m=0,1,2,\cdots$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}k_m=1 \qquad (6\cdot 20)$$

则

$$\begin{cases} p_{0,j}=p_{1,j}=k_j & j=0,1,2,\cdots \\ p_{i,j}=k_{j-i+1} & (i\geqslant 2, j\geqslant 0) \end{cases} \qquad (6\cdot 21)$$

（当 $m<0$ 时，补定义 $k_m=0$）。

例6·4.（交换过程）设某容器内之质点，每隔一个单位时间发生一次变化，已在其内之某质点可逃离此容器（其概率为 q），也可留在其内（其概率为 p），$p+q=1$。不在其内之质点也可进入其内，进入的个数服从强度为 λ 的泊松

分布：$\left\{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k=0,1,2,\cdots\right\}$。假定各质点之出、入、留是相互独立的。令$X_n$表时刻$n$此容器内之质点个数。则$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$是一个时齐的可数状态的马尔可夫链。且

$$
\begin{aligned}
p_{i,j} &\equiv P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) \\
&= \sum_{m+r=j} c_m^i p^m q^{i-m} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} \\
&= \sum_{m=0}^{\min(i,j)} c_m^i p^m q^{i-m} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!}
\end{aligned}
\tag{6·22}
$$

例6·5．（离散更新过程的年龄）

设对某设备每隔一个单位时间检修一次，一旦发现它坏了，就换一个新的同类设备。假定已使用了i个单位时间的设备在下一个单位时间仍不坏的概率为p_i，而坏掉的概率为q_i，$0<p_i<1$，$p_i+q_i=1$，$(i=0,1,2,\cdots)$。再设X_n是时刻n该设备的年龄，则$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$是一个时齐的可数状态的马尔可夫链，且

$$
p_{i,j} \equiv P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = \begin{cases} q_i & j=0 \\ p_i & j=i+1 \end{cases} \tag{6·23}
$$

$$
p_{i,j}=0 \quad （当\ j\neq 0,\ j\neq i+1）
$$

由于本节讨论的都是时齐的可数状态的马尔可夫链，所以以后把"时齐的可数状态的"一词略去，而简称为马尔可夫链。

定义6·2．设$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$是一个马尔可夫链，E是其状态空间，称

$$
p_{i,j} \equiv P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) \quad (i,j\in E)
$$

为其（一步）转移概率，由$p_{i,j}$作元素构成的矩阵

$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$ （这符号意思是：P是一个矩阵，对应于 i 行 j 列之元素为 $p_{i,j}$）称为其（一步）转移概率矩阵，简称转移矩阵。多数情况下，$E=\{0,1,2,\cdots\}$，这时转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \cdots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots \\ p_{2,0} & p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

由于一般情况下，E 是可数无穷集合，所以转移矩阵 P 是无穷行无穷列的矩阵。

称

$$p_{i,j}^{(n)}\equiv P(X_{m+n}=j\,|\,X_m=i)\quad(i,\ j\in E)$$

为 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 的 n 步转移概率，

$$P^{(n)}\equiv(p_{i,j}^{(n)},\ i,j\in E)$$

为其 n 步转移矩阵。

在有限阶矩阵中，我们曾定义过矩阵的加法和乘法，以及数与矩阵的乘法。在可数无穷阶矩阵中，我们类似地，也可定义矩阵的加法和乘法，以及数与矩阵的乘法。

设

$$Q=(q_{i,j},\ i,j\in E),\ R=(r_{i,j},\ i,j\in E)$$

a 是一个实数，$q_{i,j}$，$r_{i,j}$皆为实数，则定义

$$Q+R=(q_{i,j}+r_{i,j},\ i,j\in E)$$

$$aQ=(aq_{i,j},\ i,j\in E)$$

$$QR=\left(\sum_{k\in E}q_{i,k}r_{k,j},\ i,j\in E\right)$$

（当然，只有对每个 $i,j\in E$，级数$\sum\limits_{k\in E}q_{i,k}r_{k,j}$收敛，$QR$才

有定义。而在E为有限集的情况下，即Q和R皆为同阶（且有限）方阵，QR自然有意义。）

定义6·3. 设E是一个可数集合，$Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$，如果

$$q_{i,j}\geqslant 0,\ \sum_{j\in E}q_{i,j}\leqslant 1 \quad (\text{对一切 } i,j\in E)$$

则称Q是一个准随机矩阵。特别地，若$\sum_{j\in E}q_{i,j}\equiv 1,(i\in E)$，则称$Q$是随机矩阵。

显然，若$P^{(n)}=(p_{i,j}^{(n)},\ i,j\in E)$是某个马尔可夫链的$n$步转移矩阵，$(n\geqslant 1)$，则$P^{(n)}$必为随机矩阵。

设$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$是某个马尔可夫链的转移矩阵，a是一个实数，我们总可定义

$$aP=(ap_{i,j},\ i,j\in E)$$

$$P^2=PP=\left(\sum_{k\in E}p_{i,k}p_{k,j},\ i,j\in E\right)$$

注意：由于$0\leqslant p_{k,j}\leqslant 1$，$\sum_{k\in E}p_{i,k}=1$，所以

$$\sum_{k\in E}p_{i,k}p_{k,j} \quad (\text{对一切 } i,j\in E)$$

收敛，因此P^2有定义。类似地，我们可以定义

$$P^n=\overbrace{PP\cdots P}^{n\text{个}}$$

命题6·1. 设$P^{(n)}$是某个马尔可夫链的n步转移矩阵$(n\geqslant 1)$，$P^{(1)}=P$是其（一步）转移矩阵，则

$$P^{(n)}=P^n \quad \text{从而} \quad P^{(n)}P^{(m)}=P^{(n+m)} \quad (n,m\geqslant 1) \tag{6·24}$$

（作为习题，请读者自行验证。）

(6·24) 称为 (K-C) 方程式。

定义6·4。设 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个马尔可夫链，E是其状态空间，称

$$f_{i,j}^{(n)} \equiv P(X_1 \neq j, \cdots, X_{n-1} \neq j, X_n = j \mid X_0 = i) \qquad (6\cdot25)$$

为由 i 出发经 n 步初达 j 的概率 $(i,j\in E,\ n\geqslant 1)$。称

$$f_{i,j}^{*} = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n = j\} \mid X_0 = i\right) \qquad (6\cdot26)$$

为由 i 出发经有限步达 j 的概率 $(i,j\in E)$

显然

$$f_{i,j}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)} \quad (i,j\in E) \qquad (6\cdot27)$$

令

$$T_j = \begin{cases} 1 & 若\ X_1 = j \\ n & 当\ X_\nu \neq j\ \ 1\leqslant \nu < n\ \ X_n = j\ \ (n>1) \\ \infty & 当\ X_n \neq j\quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad (6\cdot28)$$

称 T_j为初返 j 的间隔。

显然

$$\begin{cases} P(T_j = n \mid X_0 = i) = f_{i,j}^{(n)} \quad (n\geqslant 1) \\ P(T_j = \infty \mid X_0 = i) = 1 - f_{i,j}^{*} \end{cases} \quad (i,j\in E) \qquad (6\cdot29)$$

定义6·5。设 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为一个马尔可夫链，称

$$g_{i,j} \equiv P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{X_n = j\} \mid X_0 = i\right) \qquad (6\cdot30)$$

为由 i 出发无穷多次达 j 的概率，$(i,j\in E)$

称

$$
m_{i,i}=\begin{cases}\infty & 若\ f^*_{i,i}<1\\ \sum_{n=1}^{\infty}nf^{(n)}_{i,i} & 若\ f^*_{i,i}=1\end{cases}\qquad (i\in E) \tag{6·31}
$$

为由 i 出发初返 i 的平均时间。注意：即使 $f^*_{i,i}=1$，$m_{i,i}$也可以为∞。

在例6·1中，我们证明过随机徘徊是一种特殊的马尔可夫链，而对随机徘徊这种特殊的马尔可夫链，我们已经引进过 $p^{(n)}_{i,j}$，$f^{(n)}_{i,j}$，$f^*_{i,j}$，$g^*_{i,j}$这些量（注意：§1中引进的 $g^*_{i,j}=\sum_{k=0}^{\infty}p^{(k)}_{i,j}$与现在的（6·30）中定义的 $g_{i,j}$ 是不同的），而且讨论过它们的一些关系。现在，对一般的马尔可夫链也引进了这些量，并且还引进了 $g_{i,j}$、T_j、$m_{i,i}$ 这些量。我们自然会问，这些量之间是否也有类似§1中的那些关系呢？下面我们就介绍这些量之间的一些关系。但是，由于本书的目的只是简略地介绍一些随机过程的基本内容，因此下面的命题只作介绍，不予证明。有兴趣的读者，可进一步参看文献[1]的§2，那儿有详细的证明。

命题6·2. 设 $p^{(n)}_{i,j}$、$f^{(n)}_{i,j}$、$f^*_{i,j}$、$g_{i,j}$ 如前所定义，则有

(1) $$p^{(n)}_{i,j}=\sum_{\nu=1}^{n}f^{(\nu)}_{i,j}p^{(n-\nu)}_{j,j}\quad (i,j\in E,n\geqslant 1) \tag{6·32}$$

(2) $$g_{i,j}=f^*_{i,j}g_{j,j}\quad (i,j\in E) \tag{6·33}$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,j}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{j,j}^{*}}$ $\left(j \in E,\text{ 约定 } \frac{1}{0} = \infty\right)$ (6·34)

(4) 若 $g_{i,i}=1$，$f_{i,j}^{*}>0$，则 $g_{i,j}=1$ (6·35)

(5) $g_{i,j}=f_{i,j}^{*}\lim\limits_{m\to\infty}(f_{j,j}^{*})^{m}$ $(i,j\in E)$ (6·36)

从而 $g_{i,j}$非 0 即为 $f_{i,j}^{*}$，$g_{i,i}$ 非 0 即 1，而且

"$g_{i,i}=1 \Longleftrightarrow f_{i,i}^{*}=1$" (6·37)

(6) 若 $f_{i,i}^{*}=1$，$f_{i,j}^{*}>0$，$(i\neq j)$，则

$$f_{i,i}^{*}=f_{i,j}^{*}=f_{j,i}^{*}=f_{j,j}^{*}=1 \qquad (6\cdot 38)$$

$$g_{i,i}=g_{i,j}=g_{j,i}=g_{j,j}=1 \qquad (6\cdot 39)$$

$$g_{i,i}^{*}=g_{i,j}^{*}=g_{j,i}^{*}=g_{j,j}^{*}=\infty \qquad (6\cdot 40)$$

且存在正整数 m 及正数 c，使

$$p_{j,j}^{(m+n)}\geqslant c p_{i,i}^{(n)} \quad (n\geqslant 0) \qquad (6\cdot 41)$$

$$\left(g_{i,j}=P\left|\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\{X_n=j\}\right|X_0=i\right),$$

$$\left.g_{i,j}^{*}=\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,j}^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}P(X_n=j\mid X_0=i)\right)$$

(7) $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}p_{i,j}^{(n)}\Big/\sum_{n=0}^{N}p_{j,j}^{(n)}\right)=f_{i,j}^{*}$ (6·42)

(8) $f_{i,j}^{*}=p_{i,j}+\sum_{k\neq j}p_{i,k}f_{k,j}^{*}$ $(i,j\in E)$ (6·43)

（本命题的证明请参看文献[1]的§2及命题3·3）

命题6·3。若令 $F_{i,j}(s)$、$P_{i,j}(s)$ 分别为 $\{f_{i,j}^{(n)},\ n\geqslant 1\}$ 和 $\{p_{i,j}^{(n)},\ n\geqslant 0\}$ 的矩母函数

$$F_{i,j}(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{(n)} s^n \qquad P_{i,j}(s)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,j}^{(n)} s^n$$

则有

$$P_{i,j}(s)=\delta_{i,j}+F_{i,j}(s)P_{j,j}(s) \tag{6·44}$$

证。由（6·32）及矩母函数之定义即得（6·44）

习　　题

6·1。证明命题6·1。

6·2。证明（6·16）式。

6·3。试举一例，它不是马尔可夫链。

6·4。设 $\{\xi_k,\ k=1,2,\cdots\}$ 是一个相互独立的具有公共分布的取非负整值的随机变量序列，$P(\xi_k=i)=a_i$ （$i\geqslant 0$）

$$X_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right)^2 \qquad (n\geqslant 1)$$

试判断 $\{X_n,\ n=1,2,\cdots\}$ 是否为马尔可夫链？如果是的，那末其状态空间与转移矩阵是什么？

6·5。设 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是例6·2中的分枝过程，且 $p_{1,0}=P(X_{n+1}=0\,|\,X_n=1)>0$，试证

$$g_{1,1}^{*}<\infty$$

（提示：$\{X_1=0\}=\bigcap_{m=1}^{\infty}\{X_m=0\}$，从而

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\{X_m=0\} \mid X_0=1\right)>0,$$

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\{X_m=1\} \mid X_0=1\right)<1$$

§ 7 可数状态的马尔可夫链（Ⅱ）
（状态分类及遍历性定理）

在这一节中，我们仅研究时齐的可数状态的马尔可夫链，故“时齐的可数状态的”一词略而不写。

本节沿袭§6的符号。恒设 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是马尔可夫链，E 是其状态空间，$p_{i,j}^{(n)}$ 是其 n 步转移概率，

$P_{i,j}(s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{i,j}^{(n)}s^n$，$f_{i,j}^{(n)}$ 是从 i 出发经 n 步初达 j 的概率，

$f_{i,j}^{*}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{i,j}^{(n)}$，$F_{i,j}(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_{i,j}^{(n)}s^n$，$g_{i,j}=P\Big(\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}\{X_n$

$=j\}\,|\,X_0=i\Big)$，$g_{i,j}^{*}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_{i,j}^{(k)}$，$(i,j\in E)$。$m_{i,i}$ 是由 i 出发初返 i 的平均时间。

$$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$$

是其（一步）转移矩阵。

（一）状态分类

定义7·1. 称状态空间 E 中某一状态 i 是常返的，如果 $f^*_{i,i}=1$，反之称 i 是非常返的。称常返状态 i 是积常返的（或称 i 为正状态），如果 $m_{i,i}<\infty$，称常返状态 i 是消常返的（或称之为零状态），如果 $m_{i,i}=\infty$。

定义7·2. 称正整数集合

$$\{n:n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$$

的最大公因子

$$G.C.D.\{n:n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$$

为状态 i 的周期，记之为d_i。特别地，若 $d_i=1$，则称状态 i 是无周期的。当$\{n:n\geqslant 1,\ p_{ii}^{(n)}>0\}$ 为空集时，我们不考虑 i 的周期。

若 i 是积常返状态，且 $d_i=1$，则称 i 是遍历状态。若 $p_{i,i}=1$，则称 i 是吸收状态。

显然，吸收状态必为遍历状态。

现在，我们来看看非常返状态、常返状态、消常返状态、积常返状态、遍历状态与吸收状态的概率直观意义。所谓 i 是非常返的，即 $f_{i,i}^{*}<1$，而 $f_{i,i}^{*}$的概率意义是由 i 出发经有限步达 i 的概率，所以 i 是非常返状态意即由 i 出发经有限步不一定达 i 。当然 i 是常返状态意即由 i 出发经有限步必达 i 。而 i 是消常返状态意即由 i 出发经有限步必达 i，但从 i 出发初达 i 的平均时间是∞，i 是积常返状态意即由 i 出发经有限步必达 i 且从 i 出发初达 i 的平均时间$<\infty$。而遍历状态就是无周期的积常返状态。所谓 i 是吸收状态意即马尔可夫链一旦进入状态 i，则以后此马尔可夫链永远处于状态 i 。

定义7·3. 设 i，j 是任意两个状态，若存在$n\geqslant 1$，使$p_{ij}^{(n)}>0$，则称 i 可达 j，记之为 $i\rightarrow j$。若 $i\rightarrow j$，$j\rightarrow i$，则称 i 与 j 是互通的，记之为 $i\longleftrightarrow j$ 。

称状态空间E中的子集合C是封闭的，如果

$$“i\in C,\ i\rightarrow j\Rightarrow j\in C”$$

（即是马尔可夫链一旦进入C中某一状态，则以后此马尔可

夫链永远在C中的状态转移，不会跑出C外。）

称状态空间E中的子集合C是不可分的，如果C是封闭的，且

“$C_1 \subset C$，C_1是封闭的$\Rightarrow C_1 = C$”

定理7·1.（状态的判别准则）

（1）j是非常返状态$\Longleftrightarrow f^*_{j,j}<1$

$$\Longleftrightarrow g_{j,j}=0 \Longleftrightarrow g^*_{j,j} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p^{(k)}_{j,j} < \infty \tag{7·1}$$

（2）j是常返状态$\Longleftrightarrow f^*_{j,j}=1 \Longleftrightarrow g_{j,j}=1$

$$\Longleftrightarrow g^*_{j,j}=\infty \tag{7·2}$$

（3）j是积常返状态$\Longleftrightarrow f^*_{j,j}=1$，$m_{j,j}<\infty$

$$\Longleftrightarrow g_{j,j}=1, m_{j,j}<\infty \Longleftrightarrow g^*_{j,j}=\infty, m_{j,j}<\infty \tag{7·3}$$

（4）j是消常返状态$\Longleftrightarrow f^*_{j,j}=1$，$m_{j,j}=\infty$

$$\Longleftrightarrow g_{j,j}=1,\ m_{j,j}=\infty \Longleftrightarrow g^*_{j,j}=\infty,\ m_{j,j}=\infty \tag{7·4}$$

证.由命题6·2及定义7·1可直接证明定理7·1。

定理7·2. 对马尔可夫链的状态空间E，可分解如下

$$E=N\cup R=N\cup(R^0\cup R^+) \tag{7·5}$$

其中N是全体非常返状态构成的状态集合，R是全体常返状态构成的状态集合，R^0是全体消常返状态构成的状态集合，R^+是全体积常返状态构成的 状态集合。N、R^0、R^+ 可为空集合。这时转移矩阵P有下述形式

$$\begin{array}{c|c} \quad N \quad R^0 \quad R^+ & \\ \hline P=\begin{pmatrix} Q & Q_0 & Q_+ \\ O & P_0 & O \\ O & O & P_+ \end{pmatrix} & \begin{matrix} N \\ R^0 \\ R^+ \end{matrix} \end{array} \tag{7·6}$$

此即P_0、P_+是随机矩阵且

$$(p_{i,j},\ i,j\in N)=Q$$
$$(p_{i,j},\ i\in N, j\in R^0)=Q_0$$
$$(p_{i,j},\ i\in N, j\in R^+)=Q_+$$
$$(p_{i,j},\ i,j\in R^0)=P_0$$
$$(p_{i,j},\ i,j\in R^+)=P_+$$

$$p_{i,j}=0,\quad (\text{当} i\in R^0,\ i\overline{\in} R^0)$$

$$p_{i,j}=0,\quad (\text{当} i\in R^+,\ i\overline{\in} R^+)$$

证 （1）若 $i\in R$，即 $f^*_{i,i}=1$。若 $f^*_{i,j}>0$，则由命题6·2（6）有 $f^*_{j,j}=1$，即 $j\in R$。这就证明了

"$i\in R$，$j\in N\Rightarrow f^*_{i,j}=0\ \Rightarrow p_{i,j}=0$"

（2）若 $i\in R^+$，（从而 $f^*_{i,i}=1$，$m_{i,i}<\infty$）且 $f^*_{i,j}>0$，则由命题6·2(6)知

$$f^*_{i,i}=f^*_{j,i}=f^*_{j,j}=1$$

且存在正整数m及正数c，使

$$p^{(n+m)}_{j,j}\geqslant cp^{(n)}_{i,i}\qquad (\text{对一切 } n\geqslant 0)$$

而由$m_{j,j}$的定义及(6·44)得

$$\frac{1}{m_{j,j}}=(F'_{j,j}(1))^{-1}=\lim_{\lambda\uparrow 1}\left(\frac{F_{j,j}(1)-F_{j,j}(\lambda)}{1-\lambda}\right)^{-1}$$

$$=\lim_{\lambda\uparrow 1}\frac{1-\lambda}{1-F_{jj}(\lambda)}$$

$$\overset{(6\cdot 44)}{=\!=}\lim_{\lambda\uparrow 1}(1-\lambda)P_{j,j}(\lambda)$$

$$=\lim_{\lambda\uparrow 1}(1-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}p^{(n)}_{j,j}\lambda^n$$

$$\geqslant \lim_{\lambda \uparrow 1}(1-\lambda)\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,j}^{(m+n)} \lambda^{n+m}$$

$$\geqslant \lim_{\lambda \uparrow 1}(1-\lambda)c\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} \lambda^{n+m}$$

$$=\lim_{\lambda \uparrow 1}(1-\lambda)c\sum_{n=0}^{\infty} p_{i,i}^{(n)} \lambda^{n}$$

$$=\frac{c}{m_{i,i}}>0$$

所以 $j\in R^+$。这就证明了

"$i\in R^+$, $j\overline{\in} R^+\Rightarrow f_{i,j}^*=0\Rightarrow p_{i,j}=0$"

（3）若$i\in R^0$, $f_{i,j}^*>0$,则由命题6·2知 $f_{j,i}^*=1>0$。谬设 $j\in R^+$, 则由（2）知 $i\in R^+$, 此与 $i\in R^0$ 的假设矛盾。这就证明了：

"$i\in R^0$, $j\in R^+\Rightarrow f_{i,j}^*=0\Rightarrow p_{i,j}=0$"

总上三步，定理7·2获证。

前面我们已经将状态空间E分解如下

$$E=N\cup R=N\cup(R^0\cup R^+)$$

下面我们还要将$R^0(R^+)$分成一些不交的子类。

定义7·4. 设$i,j\in R^0$, 称 i 与 j 具有互通关系，记作 $i\longleftrightarrow j$ 如果$f_{i,j}^*>0$。

注意： 由命题6.2（6）知

由"$i,j\in R^0$, i 与 j 具有互通关系"，可以推出

$$“f^*_{i,j}=f^*_{j,i}=f^*_{i,i}=f^*_{j,j}=1”$$

因此，更进一步可以推出

（a）i 与 j 具有互通关系($i\longleftrightarrow j$)蕴含了 j 与 i 具有互通关系；

（b）i 与 i 具有互通关系（$i\longleftrightarrow i$）；

（c）若 i 与 j 具有互通关系($i\longleftrightarrow j$)，j 与 k 具有互通关系（$j\longleftrightarrow k$），则 i 与 k 具有互通关系（$i\longleftrightarrow k$）。

即是说互通关系具有：(a)对称性；(b)自返性；(c)传递性。所以按互通关系可以把 R^0 分成若干不交的子集合：

$$R^0=\bigcup_{\gamma\in\Gamma^0}R^0_\gamma$$

其中Γ^0为有限指标集合或可数无穷指标集合，使得：i，j 属于同一个 R^0_γ 的充要条件是 $i\longleftrightarrow j$。

对于R^+，亦可引进互通关系“$\longleftrightarrow$”并作类似的分解：

$$R^+=\bigcup_{\gamma\in\Gamma^+}R^+_\gamma$$

其中Γ^+为有限指标集合或可数无穷指标集合。使得 i，j属于同一个R^+_γ的充要条件是 $i\longleftrightarrow j$，当$\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma^+$，$\gamma_1\neq\gamma_2$时，

$R^+_{\gamma_1}\bigcap R^+_{\gamma_2}=\phi$。

定理7·3。对马尔可夫链的状态空间E可作如下分解

$$\begin{aligned}E&=N\cup R=N\cup(R^0\cup R^+)\\&=N\cup\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma^0}R^0_\gamma\Big)\cup\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma^+}R^+_\gamma\Big)\end{aligned}\qquad(7\cdot7)$$

这样分解后，其转移矩阵P的形状如下

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccccccc} N & R_1^0 & R_2^0 & \cdots & R_1^+ & R_2^+ & \cdots \end{array} & \\
\hline
P=\begin{pmatrix}
Q & Q_{01} & Q_{02} & \cdots & Q_{+1} & Q_{+2} & \cdots \\
O & P_{01} & O & \cdots & O & O & \cdots \\
O & O & P_{02} & \cdots & O & O & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots \\
O & O & O & \cdots & P_{+1} & O & \cdots \\
O & O & O & \cdots & O & P_{+2} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} N \\ R_1^0 \\ R_2^0 \\ \vdots \\ R_1^+ \\ R_2^+ \\ \vdots \end{array}
\end{array} \tag{7·8}
$$

即是

$$(p_{i,j},\ i,j\in R_r^0)=P_{0r}\quad r\in\Gamma^0$$

$$(p_{i,j},\ i,j\in R_r^+)=P_{+r}\quad r\in\Gamma^+$$

$$(p_{i,j},\ i,j\in N)=Q$$

$$(p_{i,j},\ i\in N,j\in R_r^0)=Q_{0,r}\quad r\in\Gamma^0$$

$$(p_{i,j},\ i\in N,i\in R_r^+)=Q_{+r}\quad r\in\Gamma^+$$

$$p_{i,j}=O\quad (\text{当} i\in R_r^0,\ j\overline{\in} R_r^0)$$

$$p_{i,j}=O\quad (\text{当}\ i\in R_r^+,\ j\in R_r^+)$$

显然 P_{0r}、P_{+g} 皆为随机矩阵，($r\in\Gamma^0$，$q\in\Gamma^+$)。

（二）遍历性定理

现在我们来研究极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}$$

的存在性问题，以及当此极限存在时，如何求的问题。

引理7·1. 设 $\{f_n,n\geqslant 1\}$、$\{p_n,\ n\geqslant 0\}$ 是两个非负实数序列，满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\leqslant 1\quad p_n\leqslant 1\quad p_0=1 \tag{7·9}$$

$$p_n=\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu p_{n-\nu} \quad (n\geqslant 1) \tag{7·10}$$

则

$$\begin{aligned} &G.C.D.\{n: f_n>0,\ n\geqslant 1\} \\ =&G.C.D.\{n: p_n>0, n\geqslant 1\} \end{aligned} \tag{7·11}$$

证　令

$$s=\min\{n: f_n>0,\ n\geqslant 1\}$$

则 $s=\min\{n: p_n>0,\ n\geqslant 1\}$。再令

$$d'_M=G.C.D.\{n: f_n>0,\ s\leqslant n\leqslant M\}$$
$$d''_M=G.C.D.\{n: p_n>0,\ s\leqslant n\leqslant M\}$$

则显然有

$$d'_s=s=d''_s$$

设 $d'_M=d''_M$，往证 $d'_{M+1}=d''_{M+1}$。事实上，

$$p_{M+1}=\sum_{\nu=1}^{M} f_\nu p_{M+1-\nu}+f_{M+1}$$

若 $f_{M+1}>0$，则 $p_{M+1}>0$。因此由归纳法假设得

$$\begin{aligned} d'_{M+1}&=G.C.D.\{d'_M, M+1\} \\ &=G.C.D.\{d''_M, M+1\}=d''_{M+1} \end{aligned} \tag{7·12}$$

若 $f_{M+1}=0=p_{M+1}$，则仿（7·12）得 $d''_{M+1}=d'_{M+1}$ 若$f_{M+1}=0$，$P_{M+1}>0$，则存在 ν，使

$$1\leqslant \nu\leqslant M,\ f_\nu\ p_{M+1-\nu}>0$$

因此

$$d'_M|\nu \quad d''_M|(M+1-\nu)$$

（此处 $a|b$ 表a能整除b），从而由 $d'_M=d''_M$ 得 $d'_M|(M+1)$，$d''_M|(M+1)$，所以

$$d'_{M+1}=d'_M=d''_M=d''_{M+1}$$

总之，恒有

$$d'_{M+1}=d''_{M+1} \quad (对一切\ M\geqslant s)$$

归纳法完成，亦即证明了

$$d'_k=d''_k \quad (对一切\ k\geqslant s)$$

因此

$$\begin{aligned} & G.C.D.\{n: f_n>0,\ n\geqslant 1\} \\ =& G.C.D.\{n: f_n>0,\ n\geqslant s\} \\ =& \lim_{k\to\infty}\ (G.C.D.\{n: f_n>0,\ s\leqslant n\leqslant k\}) \\ =& \lim_{k\to\infty}\ d'_k=\lim_{k\to\infty} d''_k \\ =& G.C.D.\{n: p_n>0,\ n\geqslant s\} \\ =& G.C.D.\{n: p_n>0,\ n\geqslant 1\} \end{aligned}$$

定理7·4. 若 i 是常返状态，其周期为d_i，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(nd_i)}=\frac{d_i}{m_{i,i}} \tag{7·13}$$

（其中$m_{i,i}$是由 i 出发初返 i 的平均时间，当 $b=\pm\infty$，a 为实数时，此后恒定义$\frac{a}{b}=0$）

证 由于 i 是固定的状态，故可简记$p_{i,i}^{(n)}$、$f_{i,i}^{(n)}$、d_i、$m_{i,i}$ 为 p_n、f_n、d、m显然$\{f_n,\ n\geqslant 1\}$、$\{p_n, n\geqslant 0\}$（满足引理7·1.的条件。令

$$r_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty} f_\nu \quad (n\geqslant 0) \tag{7·14}$$

则由 i 是常返状态（从而 $r_0=f_{i,i}^{*}=1$）得

$$r_0 p_n = p_n = \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu p_{n-\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} (r_{\nu-1} - r_\nu) p_{n-\nu}$$

因此

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu p_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n-1} r_\nu p_{n-1-\nu}$$

不依赖 $n \geqslant 0$。但是 $r_0 p_0 = 1$，所以

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_\nu p_{n-\nu} \equiv 1 \quad (\text{对一切 } n \geqslant 0) \tag{7·15}$$

令

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} p_{nd}$$

则由 d 是周期（从而 $p_k = 0$ 当 $k \neq 0 \pmod d$）及 $p_k \geqslant 0$ 得知

$$\lambda = \limsup_{n\to\infty} p_{nd} = \limsup_{n\to\infty} p_n \tag{7·16}$$

因此必有正整数列$\{n_k\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$且

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k d} = \lambda \tag{7·17}$$

由 $p_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu p_{n-\nu}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = 1$ 可证：

$$\text{“}f_s > 0,\ \lim_{k\to\infty} p_{m_k} = \lambda \Rightarrow \lim_{k\to\infty} p_{m_k - s} = \lambda\text{”}$$

所以，反复利用上述推理可证：

$$“t=\sum_{j=1}^{u} c_j s_j,\quad c_j, s_j \text{ 为正整数}, f_{s_j}>0, 1\leqslant j\leqslant u$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} p_{n_k d-t}=\lambda”$$

用引理7·1.及周期d的定义得知存在正整数s_j，使$f_{s_j}>0$，$1\leqslant j\leqslant u$，$d=G.C.D.\{s_1,\cdots,s_u\}$

所以，存在 s_0，使

$$“s\geqslant s_0\Rightarrow sd=\sum_{j=1}^{u} c_j s_j”$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} p_{(n_k-s)d}=\lambda \text{（当 } s\geqslant s_0\text{）} \tag{7·18}$$

以$n=(n_k-s_0)d$代入(7·15)并注意$p_\nu=0$(当$\nu\neq 0(mod\ d)$)，有

$$\sum_{\nu=0}^{n_k-s_0} r_{\nu d}\ p_{(n_k-s_0-\nu)d}=1 \tag{7·19}$$

当 $\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d}<\infty$时，在(7·19)中令$k\to\infty$并利用控制收敛定理

及（7·18）得

$$1=\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=0}^{n_k-s_0} r_{\nu d} p_{(n_k-s_0-\nu)d}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d}\ p_{(n_k-s_0-\nu)d}\varepsilon_k(\nu)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}r_{\nu d}\lim_{k\to\infty}p_{(n_k-s_0-\nu)d}\varepsilon_k(\nu)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}r_{\nu d}\lambda \tag{7·20}$$

$\left(此处\ \varepsilon_k(\nu)=\begin{cases}1 & (当\nu\leqslant n_k-s_0)\\ 0 & (当\nu>n_k-s_0)\end{cases}\right)$

而当$\sum_{\nu=0}^{\infty}r_{\nu d}=\infty$，易证 $\lambda=0$。总之不论何时，恒有

$$\lambda=\frac{1}{\sum_{\nu=0}^{\infty}r_{\nu d}} \tag{7·21}$$

又因为

$$f_j=0 \quad (当\ j\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d))$$

所以

$$r_{\nu d}=\sum_{j=\nu d+1}^{\infty}f_j=\sum_{j=\nu d+m}^{\infty}f_j=r_{\nu d+m-1}\quad 1\leqslant m\leqslant d$$

因此把上式对 m 从 1 到 d 求和得

$$dr_{\nu d}=\sum_{m=0}^{d-1}r_{\nu d+m}$$

即是

$$r_{\nu d}=\frac{1}{d}\sum_{j=\nu d}^{\nu d+d-1}r_j$$

从而

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} r_{\nu d}=\frac{1}{d}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{j=\nu d}^{\nu d+d-1} r_j=\frac{1}{d}\sum_{m=0}^{\infty} r_m$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{u=m+1}^{\infty} f_u=\frac{1}{d}\sum_{u=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{u-1} f_u$$

$$=\frac{1}{d}\sum_{u=1}^{\infty} u f_u=\frac{m}{d} \tag{7·22}$$

所以由（7·21）、（7·22）得

$$\lambda=\frac{d}{m}$$

若令

$$\beta=\liminf_{n\to\infty} p_{nd}$$

仿之可证

$$\beta=\frac{d}{m}$$

总之

$$\lim_{n\to\infty} p_{nd}=\frac{d}{m}$$

定理证毕。

系1. 设 i 是积常返状态，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)}$$

存在的充要条件是 $d_i=1$。若 $d_i=1$ 必有

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{m_{i,i}} > 0$$

证 设 $d_i=1$，由定理7·4立得

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)} = \frac{1}{m_{i,i}} > 0$$

若 $d_i>1$，则由d_i之定义及定理7·4得

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(nd_i+1)} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(nd_i)} = \frac{d_i}{m_{i,i}} > 0$$

此即$\left\{ p_{i,i}^{(n)},\ n\geqslant 0 \right\}$有两个收敛到不同极限的子序列，所以

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}^{(n)}$$

不存在。

系2．对任何状态 i，平均遍历极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{i,i}^{(\nu)}$$

存在且等于 $1/m_{i,i}$。（约定$\frac{1}{\infty}=0$）

（当 i 为非常返状态时，系 2 显然成立）

证 设 i 为常返状态。令$[x]$表不大于 x 的最大整数，再令 $t=d_i$为 i 之周期，则

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{t} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{t}\right]-1} p_{i,i}^{(kt+m)} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} p_{i,i}^{(\nu)}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{t}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{t}\right]+1} p_{i,i}^{(kt+m)} \tag{7·23}$$

由于 t 是 i 的周期，所以

$$p_{i,i}^{(s)} = 0 \ （当 \ s \neq 0(\bmod t)）$$

因此（7·23）化为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{t}\right]-1} p_{i,i}^{(kt+t)} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} p_{i,i}^{(\nu)}$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{t}\right]+1} p_{i,i}^{(kt+t)} \tag{7·24}$$

而（7·24）左方当 $n\to\infty$ 时的极限为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\frac{n}{t}\right]}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{t}\right]} p_{i,i}^{(kt)} \cdot \frac{\left[\frac{n}{t}\right]}{n}$$

定理7·4. $\frac{t}{m_{i,i}} \frac{1}{t} = \frac{1}{m_{i,i}}$ (7·25)

仿（7·25）可证(7·24)右方当 $n\to\infty$时的极限亦为$\frac{1}{m_{i,i}}$。

总之

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} p_{i,i}^{(\nu)} = \frac{1}{m_{i,i}}$$

定理7·5. 设 $P^n = (p_{i,j}^{(n)}, i, j \in E)$是某个马尔可夫链的

n 步转移概率矩阵，$E=N\cup R^0\cup R^+$

（1）对任何 $i\in E$，$i\notin R^+$，总有

$$\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=0 \tag{7·26}$$

（2）对任何 $i\in E$，$j\in R^+$，若令 $t=d_j$ 为 j 之周期，$m_{j,j}=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{j,j}^{(n)}$ 为从 j 出发初返 j 的平均时间，再令

$$f_{i,j}^{*}\ (r)=\sum_{m=0}^{\infty}f_{i,j}^{(mt+r)}\qquad (1\leqslant r\leqslant t) \tag{7·27}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(nt+r)}=f_{i,j}^{*}\ (r)\cdot\frac{t}{m_{j,j}}\ (1\leqslant r\leqslant t) \tag{7·28}$$

证 （1）取 $1\leqslant M<n$，由命题6·2有

$$p_{i,j}^{(n)}=\sum_{\nu=1}^{n}f_{i,j}^{(\nu)}\ p_{j,j}^{(n-\nu)}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{M}f_{i,j}^{(\nu)}\ p_{j,j}^{(n-\nu)}+\sum_{\nu=M+1}^{n}f_{i,j}^{(\nu)}\ p_{j,j}^{(n-\nu)}$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{M}f_{i,j}^{(\nu)}\ p_{j,j}^{(n-\nu)}+\sum_{\nu=M+1}^{\infty}f_{i,j}^{(\nu)}\ (i,j\in E) \tag{7·29}$$

而由命题6.2，当 $j\in N$（非常返状态）时，有

$$\lim_{n\to\infty}p_{i,j}^{(n)}=0 \tag{7·30}$$

而由定理7·4，当$j\in R^0$（消常返状态）时，有

$$\lim_{n\to\infty} p_{j,j}^{(nt)}=\frac{t}{m_{j,j}}=0 \tag{7·31}$$

而 $k\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, t)$ 时， $p_{j,j}^{(k)}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} p_{j,j}^{(n)}=0\ (\text{当 } j\in R^0) \tag{7·32}$$

因此，在（7·29）中先令$n\to\infty$，次令$M\to\infty$并注意（7·32）及

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{i,j}^{(\nu)}=f_{i,j}^{*}\leqslant 1$$

可得

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}=0 \quad (j\in R^0) \tag{7·33}$$

由（7·30）、（7·33）得

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}=0\ (j\overline{\in} R^+,\ i\in E) \tag{7·34}$$

（2）由（7·29）及 $p_{j,j}^{(k)}=0$（当 $k\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d_j)$）可得

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{(nt+r)} &= \sum_{\nu=1}^{nt+r} f_{i,j}^{(\nu)}\ p_{j,j}^{(nt+r-\nu)} \\ &= \sum_{\substack{1\leqslant\nu\leqslant nt+r\\ \nu\equiv r(\mathrm{mod}\, t)}} f_{i,j}^{(\nu)}\ p_{j,j}^{(nt+r-\nu)} \\ &= \sum_{1\leqslant mt+r\leqslant nt+r} f_{i,j}^{(mt+r)}\ p_{j,j}^{(nt-mt)} \end{aligned}$$

$$=\sum_{m=0}^{n} f_{i,j}^{(mt+r)} \quad p_{j,j}^{(nt-mt)} \qquad (i,j\in E) \qquad (7\cdot35)$$

（注意 $t=d_j$）

所以，若取 $1\leqslant M<n$，由（7·35）得

$$\sum_{m=0}^{M} f_{i,j}^{(mt+r)} \ p_{j,j}^{(nt-mt)} \leqslant p_{i,j}^{(nt+r)}$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{M} f_{i,j}^{(mt+r)} \ p_{j,j}^{(nt-mt)} + \sum_{m=M+1}^{\infty} f_{i,j}^{(mt+r)} \qquad (i,j\in E) \qquad (7\cdot36)$$

而由定理7·4有

$$\lim_{n\to\infty} p_{j,j}^{(nt-mt)}=\frac{t}{m_{j,j}} \qquad (j\in R) \qquad (7\cdot37)$$

而由 $f_{i,j}^{*}$ （r）的定义有

$$\lim_{M\to\infty}\sum_{m=0}^{M} f_{i,j}^{(mt+r)} = f_{i,j}^{*}\ (r) \quad \begin{pmatrix} i,j\in E \\ 1\leqslant r\leqslant t \end{pmatrix} \quad (7\cdot38)$$

在（7·36）中先令 $n\to\infty$ 次令 $M\to\infty$，并注意（7·37）、（7·38）可得

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(nt+r)} = f_{i,j}^{*}\ (r)\ \frac{t}{m_{j,j}} \qquad (i\in E, j\in R^{+})$$

定理7·5证毕。

定理7·6．设 $P^{n}=(p_{i,j}^{(n)},\ i,j\in E)$ 是某个马尔可夫链的 n 步转移概率矩阵，则对任意的 $i,j\in E$，极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{i,j}^{(\nu)} = \pi_{i,j} = \frac{1}{m_{j,j}} f_{i,j}^{*} \qquad (7\cdot39)$$

存在。

证　令状态 j 的周期 $d_j = t$

（1）设 $i \in E$，$j \bar{\in} R^{+}$，则由定理 7·5（1）立即可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{i,j}^{(\nu)} = \pi_{i,j} \text{ 存在。}$$

（2）设 $i \in E$，$j \in R^{+}$。由于

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_{i,j}^{(\nu)}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{t}\right]-1} \sum_{r=1}^{t} p_{i,j}^{(mt+r)} + \sum_{k=\left[\frac{n}{t}\right]t+1}^{n} p_{i,j}^{(k)} \right) \qquad (7\cdot40)$$

而

$$0 \leqslant \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=\left[\frac{n}{t}\right]t+1}^{n} p_{i,j}^{(k)} \right)$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{t}{n}\right) = 0 \qquad (7\cdot41)$$

又由定理 7.5（2）有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{t}\right]-1} \sum_{r=1}^{t} p_{i,j}^{(mt+r)}$$

$$=\sum_{r=1}^{t}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\frac{n}{t}\right]}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{t}\right]-1}p_{i,j}^{(mt+r)}\cdot\frac{\left[\frac{n}{t}\right]}{n}\right)$$

$$=\sum_{r=1}^{t}\left(f_{i,j}^{*}(r)\frac{t}{m_{j,j}}\cdot\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{m_{j,j}}\sum_{r=1}^{t}f_{i,j}^{*}(r)$$

$$=\frac{1}{m_{j,j}}f_{i,j}^{*} \tag{7·42}$$

以（7·41）、（7·42）代入（7·40）得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}p_{i,j}^{(\nu)}=\pi_{i,j}=\frac{1}{m_{j,j}}f_{i,j}^{*}$$

存在。

（三）平均遍历极限的求法

在定理7·6中，我们证明了平均遍历极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}p_{i,j}^{(\nu)}=\pi_{i,j}=\frac{1}{m_{j,j}}f_{i,j}^{*}\ (i,j\in E)$$

恒存在。现在我们来讨论如何从一步转移矩阵 $P=(p_{i,j},i,j\in E)$ 来求 $\pi_{i,j},(i,j\in E)$。我们不拟对一般的转移矩阵P来求 $\pi_{i,j}$，仅对特殊的转移矩阵P（不可约的）来求 $\pi_{i,j}$。

定义7·5．设 $P=(p_{i,j},i,j\in E)$是某马尔可夫链的转移矩阵。称P（或者称E）是不可约的，如果E中任意二状态 i 和 j 都是互通的：$i\longleftrightarrow j$。反之，称P（或称E）是可约

的。

易见E为不可约的充要条件是：E不含封闭的真子集。

下面我们引进几个符号。

设E为可数集合。我们用x、y…表定义域为E的列向量。如$E=\{0,1,2,\cdots\}$，那么

$$x=\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad y=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

再令x'、y'…表x、y…的转置，即是x'、y'是定义域为E的行向量

$$x'=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots) \qquad y'=(y_0,y_1,y_2,\cdots)$$

再令

$$\mathbf{1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

约定$x\geqslant 0$意即x之每一分量皆$\geqslant 0$。

采用符号

$$(l)=\{x':\sum_{i\in E}|x_i|<\infty,\ x'=(x_i,i\in E)\}$$

$$(m)=\left\{x:\ \sup_{i\in E}|x_i|<\infty,\ x=\begin{pmatrix} x_i \\ i\in E \end{pmatrix}\right\}$$

若$F\subset E$，则

$$(m_F)=\left\{x:\ \sup_{i\in F}|x_i|<\infty,\ x=\begin{pmatrix} x_i \\ i\in F \end{pmatrix}\right\}$$

$$(l_F)=\{x': \sum_{i\in F}|x_i|<\infty, \quad x'=(x_i, \quad i\in F)\}$$

亦即(m_F)是定义在F上的其分量一致有界的列向量的全体，(l_F)是定义在F上的其分量之绝对值之和为有限的行向量的全体。

定理 7·7. 设$P=(p_{i,j},i,j\in E)$是某个马尔可夫链的转移矩阵，P是不可约的，令

$$\pi_{i,j}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}p_{i,j}^{(\nu)} \qquad (i,j\in E)$$

$$\Pi=(\pi_{i,j}, \quad i,j\in E)$$

（1）解

左方程：$\ll x'p=x', \ x'\geqslant 0, \ x'\in(l)\gg$，

（a）若左方程有非0解x'（这时，可证其解差一常数倍是唯一的），则

$E=R_1^+$，即E由一个积常返类所构成。而且

$$\Pi=\mathbf{1}\pi'$$

其中$\pi'=\dfrac{1}{x'\mathbf{1}}\cdot x' \quad \pi'\mathbf{1}=1$

即是Π是行行相同的矩阵，每行之和为1。

（b）若左方程只有0解，则

$$E=N \quad 或者E=R_1^0$$

即是E或者由非常返状态所构成，或者由一个消常返类所构成。而且

$$\Pi=0$$

如何判断$E=N$ 或者 $E=R_1^0$呢？

（2）解

右方程：$\ll Ay=y, \ y\geqslant 0, \ y\in(m_{E-\{j\}})\gg$，

其中 j 是 E 中任一状态，A 是由 P 去掉第 j 行第 j 列而得之余阵。则

"右方程有非0解 $\Longleftrightarrow E=N$"

在§6中，我们曾经给出过几个马尔可夫链的例子。在这一节中，我们将要求出它们的平均遍历极限矩阵

$$\Pi=(\pi_{i,j},\quad i,j\in E)\quad \pi_{i,j}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}p_{i,j}^{(n)}$$

例7·1（续例6·1）。设 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是直线上的整数点上的贝努利随机徘徊（当然是马尔可夫链），于是状态空间 $E=\{0,\pm1,\ \pm2,\cdots\}$ 转移矩阵 $P=(p_{i,j},\ \ i,j\in E)$

$$p_{i,i-1}=q_i\quad p_{i,i+1}=p_i\qquad (i\in E)$$

$$p_i>0\quad q_i>0\quad q_i+p_i=1\qquad (i\in E)$$

$$p_{i,j}=0\qquad (|i-j|>1,\ \ i,j\in E)$$

显然 P 是不可约的（因为任意二状态都是互通的），每一个状态 i 的周期 $d_i=d=2$

利用定理7·7，解

左方程 $\ll x'P=x',\ \ x'\geqslant0,\ \ x'\in(l)\gg$

易见

$$x'P=x'\qquad (\text{注意：}x'=(x_i,i\in E))$$

等价于

$$\begin{array}{ll} x_0=p_{-1}\ x_{-1}+q_1\ x_1 & x_0=p_{-1}\ x_{-1}+q_1x_1 \\ x_1=p_0x_0+q_2x_2 & x_{-1}=p_{-2}x_{-2}+q_0x_0 \\ x_2=p_1x_1+q_3x_3 & x_{-2}=p_{-3}x_{-3}+q_{-1}x_{-1} \\ \vdots & \vdots \end{array}\qquad (7\cdot43)$$

若注意 $x_i=p_ix_i+q_ix_i$，$(i\in E)$，则上述方程组化为

$$(p_{i-1}x_{i-1}-q_ix_i)=(p_ix_i-q_{i+1}x_{i+1})=c$$

$$(i \in E) \qquad (7 \cdot 44)$$

所以，由

$$Mc = \sum_{i=1}^{M} (p_{i-1}x_{i-1} - q_i x_i)$$

得

$$|Mc| \leqslant 2\sum_{i=0}^{M} |x_i| \quad (M \geqslant 1) \qquad (7 \cdot 45)$$

因此由 $x'P = x'$ 等价于（7·44），再注意（7·45）得

$$\ll x'P = x', \ x' \in (l) \gg$$

的通解为

$$(p_{i-1}x_{i-1} - q_i x_i) = 0 \quad (i \in E) \qquad (7 \cdot 46)$$

的通解。

而（7·46）的通解为

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i} x_0 \quad (i > 0) \\ x_{-i} &= \frac{q_0 q_{-1} \cdots q_{-i+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}} x_0 \quad (i < 0) \end{aligned}\right\} \qquad (7 \cdot 47)$$

令

$$\delta = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_0 p_1 \cdots p_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i} + \frac{q_0 q_{-1} \cdots q_{-i+1}}{p_{-1} p_{-2} \cdots p_{-i}} \right)$$

则由 $\ll x'P = x', \ x' \in (l) \gg$ 的通解为（7.47）可看出

（1）当 $\delta < \infty$ 时，

左方程：$\ll x'P = x', \ x' \geqslant 0, \ x' \in (l) \gg$ 有非0解

$$x' = (x_i, \ x_i \in E)$$

其中 $x_0=1$，$x_i=\dfrac{p_0p_1\cdots p_{i-1}}{q_1q_2\cdots q_i}$，$(i>0)$，

$$x_i=\frac{q_0q_{-1}\cdots q_{-i+1}}{p_{-1}p_{-2}\cdots p_{-i}},\quad (i<0),$$

所以由定理7·7（1）得知

$$E=R_1^+$$

$$\Pi=\mathbf{1}\pi' \qquad \pi'=\frac{1}{x'\mathbf{1}}x'=\frac{1}{1+\delta}x'$$

（2）当 $\delta=\infty$时，

左方程：$\ll x'P=x',\ x'\geqslant 0,\ x'\in(l)\gg$只有0 解。所以$\Pi=0$，且$E=N$或$R_1^0$。究竟$E=N$或$R_1^0$呢？

令A为P去掉第0行第0列所得之余阵。解

右方程：$\ll Ay=y,\ y\geqslant 0,\ y\in(m_{E-\{0\}})\gg$

由 $Ay=y$，（其中 $y=\begin{pmatrix}y_i\\ i\in E-\{0\}\end{pmatrix}$为列向量）

可得

$$y_{i+1}=\left(1+\frac{q_1}{p_1}+\cdots+\frac{q_1\cdots q_i}{p_1\cdots p_i}\right)y_1 \quad (i\geqslant 1) \quad (7\cdot 48)$$

$$y_{-i-1}=\left(1+\frac{p_{-1}}{q_{-1}}+\cdots+\frac{p_{-1}\cdots p_{-i}}{q_{-1}\cdots q_{-i}}\right)y_{-1} \quad (i\geqslant 1)$$

令

$$\theta_1=\left(1+\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_1q_2}{p_1p_2}+\cdots\right)$$

$$\theta_2=\left(1+\frac{p_{-1}}{q_{-1}}+\frac{p_{-1}p_{-2}}{q_{-1}q_{-2}}+\cdots\right)$$

则由定理7·7（2）得

（a）$\theta_1=\theta_2=\infty\Rightarrow$右方程只有0解$\Rightarrow E=R_1^0$

（b）θ_1，θ_2中至少有一个为有限数⇒

右方程有非0解⇒$E=N$

例7.2（续例6.2）。设$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$是例6.2所定义的分枝过程，$P=(p_{i,j}, i,j\in E)$是其转移矩阵，$E=\{0,1,2,\cdots\}$，$p_{0,j}=\delta_{0,j}$，$(j\in E)$，

$$p_{i,j}=\sum_{\sum_{s=1}^{i} j_s=j}\prod_{s=1}^{i}p_{1,j_s}$$

$$=\sum_{\sum_{s=1}^{i} j_s=j}\prod_{s=1}^{i}p_{j_s}\quad (i\geqslant 1,\ j\geqslant 0)\qquad (7\cdot 49)$$

其中

$$f(s)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k\quad (|s|\leqslant 1)$$

是其本原矩母函数。由定理2.7得

$$\bar{\rho}=\lim_{n\to\infty}P(X_n=0|X_0=i)$$

$$=\lim_{n\to\infty}p_{i,0}^{(n)}=\rho^i\qquad (i\geqslant 0)\qquad (7\cdot 50)$$

其中ρ由下面的办法确定

（a）若$\mu=f'(1)\leqslant 1$，$p_1<1$，则$\rho=1$；

（b）若$\infty\geqslant\mu>1$，ρ是$s=f(s)$在$[0,1)$内之唯一根。

不妨令$p_{1,0}>0$，从而$p_{i,0}=p_{1,0}^{i}>0$　（$i\geqslant 0$）这时，显然，当$i\geqslant 1$时，i是非常返状态，$i=0$是积常返状态。

（因为 $p_{0,0}=1$，从而 $p_{0,0}^{(n)}=1$，$(n\geqslant 0)$，故 $g_{0,0}^{*}=$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} p_{0,0}^{(k)}=\infty,\quad m_{0,0}=\sum_{n=1}^{\infty} n\ f_{0,0}^{(n)}=f_{0,0}^{(1)}=p_{0,0}=1,$$ 所以

0 是积常返状态）

因此，由定理7.5及（7.50）得

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)}=\begin{cases}0 & \text{当 } j=1,2,\cdots \quad i\in E\\ \rho^{i} & \text{当 } j=0 \qquad\quad\ \ i\in E\end{cases}$$

当然更有

$$\pi_{i,j}=\begin{cases}0 & \text{当 } j=1,2,\cdots \quad i\in E\\ \rho^{i} & \text{当 } j=0 \qquad\quad\ \ i\in E\end{cases}$$

即是

$$\boldsymbol{\Pi}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots\\ \rho & 0 & 0 & \cdots\\ \rho^{2} & 0 & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

例7.3（续例6·3）。设 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是例 6.3 中所定义的嵌入马尔可夫链。其状态空间 $E=\{0,1,2,\cdots\}$，其转移概率

$$\begin{cases}p_{0,j}=p_{1,j}=k_{j} & j=0,1,2,\cdots\\ p_{i,j}=k_{j-i+1} & (i\geqslant 2, j=0,1,2,\cdots)\end{cases}$$

其中 $k_m\geqslant 0$, $(m\geqslant 0)$，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}k_m=1$，当 $m<0$ 时，补定义 $k_m=0$。即是其转移矩阵 P 如下

$$P=\begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ k_0 & k_1 & k_2 & k_3 & \cdots \\ 0 & k_0 & k_1 & k_2 & \cdots \\ 0 & 0 & k_0 & k_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

不妨设 $k_0>0$，$k_2+k_3+\cdots>0$。否则是不足道的情况。

现在我们能否用例7·1和例7·3的方法来求Π呢？显然不能了，因为现在

$$x'P=x'$$

是无穷个方程式，而方程式的变量的个数是无穷的，我们用什么方法来求Π呢？仔细观察一下P的形状，我们发现P的各行还是有规则的，后一行恰是前一行往右错一位。于是我们用"矩母函数"的方法求解。

由P的形状及 $k_0>0$，$k_2+k_3+\cdots>0$（不妨设有 $i\geqslant 2$，使 $k_i>0$）发现：0经过一步可达 i（因为 $k_i>0$），i 经过一步可达 $i-1$，…，i 经过 $i-1$ 步可达1，i 经过 i 步可达0（因为 $k_0>0$），这就说明

$$i\to i-1\to\cdots\to 1\to 0\to i$$

亦即$\{0,1,\cdots,i\}$中任意二个状态都是互通的，仿之可证$\{i, i+1, \cdots, 2i\}$内任意二个状态都是互通的，从而$\{0, 1, 2, \cdots 2i\}$中任意二个状态都是互通的。这样作n次，可知

$$\{0,1,2,\cdots,ni\}$$

中任意二个状态都是互通的，($n\geqslant 1$，$i\geqslant 2$)，所以$E=\{0,1,2,\cdots\}$中任意二个状态都是互通的，亦即P是不可约的。

现在我们利用矩母函数的方法来求Π。令

$$K(s)=\sum_{i=0}^{\infty}k_i s^i \quad X(s)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i s^i \quad (|s|<1)$$

其中

$$x'=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in(l)$$

令

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1\\ s\\ s^2\\ \vdots\end{pmatrix}$$

则

$$x'P=x'\Longleftrightarrow x'\Lambda=x'P\Lambda \qquad (|s|<1)$$

$$\Longleftrightarrow X(s)=x'\begin{pmatrix}K(s)\\ K(s)\\ sK(s)\\ s^2K(s)\\ \vdots\end{pmatrix}=K(s)(x_0+x_1+x_2s+x_3s^2+\cdots)$$

$$\Longleftrightarrow sX(s)=K(s)(x_0s+x_1s+x_2s^2+x_3x^3+\cdots)$$

$$=K(s)(x_0(s-1)+X(s))$$

$$\Longleftrightarrow X(s)=\frac{x_0(1-s)K(s)}{K(s)-s} \qquad (|s|<1) \qquad (7\cdot51)$$

注意：由 P 之形式知

$$x'=x'P$$

的解 $x'=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 满足

$$x'=(x_0,x_1,x_2,\cdots)>0\Leftrightarrow x_0>0 \qquad (7\cdot52)$$

若左方程有非 0 解 x'，即 $x'=x'P,x'\geqslant0,x'\neq0,x'\in(l)$。

则由(7·51)，(7·52)得

$$\frac{K(s)-s}{1-s}=\frac{x_0K(s)}{X(s)} \quad (|s|<1)$$

$$(x'\geqslant 0,\ x'\in(l),\ x_0>0) \tag{7·53}$$

把（7·53）两边对 $s\uparrow 1$ 取极限并用洛必大法则可得

$$1-K'(1)=\lim_{s\uparrow 1}\frac{K'(s)-1}{-1}=\lim_{s\uparrow 1}\frac{K(s)-s}{1-s}$$

$$=\lim_{s\uparrow 1}\frac{x_0K(s)}{X(s)}=\frac{x_0}{X(1)}>0 \tag{7·54}$$

即是 $K'(1)<1$。所以

（1）若 $K'(1)\geqslant 1$，则左方程只有 0 解，于是 $\Pi=0$，且 $E=N$ 或者 $E=R_1^0$。

（2）若 $K'(1)<1$，则由（7·51）取

$$X(s)=\frac{(1-s)K(s)}{K(s)-s} \tag{7·55}$$

可知 $X(s)$ 之系数 $x'=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 满足

$$x'=x'P$$

而今 $x_0=X(0)=K(0)/K(0)=1>0$

所以由（7·52）知

$$x_i>0 \quad i=0,1,2,\cdots$$

又

$$\sum_{i=0}^{\infty}x_i=X(1)=\lim_{s\uparrow 1}X(s)$$

$$=\lim_{s\uparrow 1}\frac{(1-s)K(s)}{K(s)-s}=\lim_{s\uparrow 1}\frac{(1-s)}{K(s)-s}$$

$$\xlongequal{(7.54)}\frac{1}{1-K'(1)}<\infty \qquad (7\cdot56)$$

此即 $x'=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$是左方程的一个非0解，所以

$$\Pi=\mathbf{1}\,\pi'=\frac{1}{x'\mathbf{1}}\cdot\mathbf{1}x'$$

$$\xlongequal{(7\cdot56)}\quad(1-K'(1))\cdot\mathbf{1}x'$$

$$E=R_1^+$$

究竟什么时候$E=N$？什么时候$E=R_1^0$呢？我们只给出结论，就不予证明了。

当$K'(1)=1$时，$E=R_1^0$；

当$K'(1)>1$时，$E=N$。

例7·4（续例6·4）。设$\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$为例6·4所定义的交换过程，其状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$，其转移矩阵P为

$$P=(p_{ij},\ i,j\in E)$$

$$p_{i,j}=\sum_{m=0}^{\min(i,j)}C_m^i p^m q^{i-m} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!}$$

$$(i,j\in E,\lambda\text{为正数，}0<p<1,\ p+q=1,)\qquad(7\cdot57)$$

其中C_m^i为i个元素中取m个的组合数。

显然，对任何$i,j\in E$，$p_{i,j}>0$，所以P是不可约的。

仿例7·3，我们用母函数方法来求Π。令

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1\\ s\\ s^2\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$\varphi_i(s)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{i,j}s^j(i\geqslant 0,\ \ |s|<1) \qquad (7\cdot 58)$$

则 $x'=x'P$ 等价于

$$X(s)=x'P\Lambda=x'\begin{pmatrix}\varphi_0(s)\\ \varphi_1(s)\\ \varphi_2(s)\\ \vdots\end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{\infty}x_i\varphi_i(s) \qquad (7\cdot 59)$$

以（7·57）代入(7·58)得

$$\varphi_i(s)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\min(i,j)}C_m^i p^m q^{i-m}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!}s^j$$

$$=\sum_{j=0}^{i}\sum_{m=0}^{j}C_m^i p^m q^{i-m}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!}s^j$$

$$+\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{i}C_m^i p^m q^{i-m}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{j-m}}{(j-m)!}s^j$$

$$=\sum_{m=0}^{i}C_m^i(ps)^m q^{i-m}e^{-\lambda}\sum_{j=m}^{i}\frac{(\lambda s)^{j-m}}{(j-m)!}$$

$$+\sum_{m=0}^{i}C_m^i(ps)^m q^{i-m}e^{-\lambda}\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{(\lambda s)^{j-m}}{(j-m)!}$$

$$=\sum_{m=0}^{i}C_m^i(ps)^m q^{i-m}e^{-\lambda}\sum_{j=m}^{\infty}\frac{(\lambda s)^{j-m}}{(j-m)!}$$

$$=e^{\lambda(s-1)}(ps+q)^i \qquad (7\cdot 60)$$

以（7·60）代入（7·59）得知

$$x' = x'P$$

等价于

$$X(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i e^{\lambda(s-1)} (ps+q)^i = e^{\lambda(s-1)} X(ps+q)$$

$$(7\cdot61)$$

令

$$Y(s) = e^{-\frac{\lambda s}{q}} X(s) \quad T(s) = ps + q \tag{7·62}$$

代入（7·61）得知 $x' = x'P$ 等价于

$$Y(s) = Y(T(s)) \tag{7·63}$$

所以若令

$T_n(s) = T_{n-1}(T(s))$，$(n \geqslant 2$，$T_1(s) = T(s))$，则

由（7·63）得

$$Y(s) = Y(T_n(s)) \quad (n \geqslant 1) \tag{7·64}$$

而当 $0 < s < 1$ 时，$T(s)$是 s 的严格上升函数，所以当 $o < s < 1$ 时有

$$s = ps + qs < ps + q = T(s) < T(ps+q)$$
$$= T_2(s) \cdots < T_n(s) < 1 \quad (n \geqslant 1)$$

因此当 $0 < s < 1$，$n \uparrow \infty$时，$T_n(s)$单调上升地趋于$\sigma(s)$，

$$\lim_{n\to\infty} T_n(s) = \sigma(s) \quad (0 < s < 1) \tag{7·65}$$

而$T(s)$是 s 的连续函数，所以

$$T(\sigma(s)) = T(\lim_{n\to\infty} T_n(s)) = \lim_{n\to\infty} T(T_n(s))$$

$$= \lim_{n\to\infty} T_{n+1}(s) = \sigma(s) \quad (0 < s < 1) \tag{7·66}$$

由（7·62）、（7·66），得

$$p\sigma(s)+q=\sigma(s) \quad (0<s<1)$$

所以

$$\sigma(s)\equiv\frac{q}{1-p}\equiv 1 \quad (0<s<1) \tag{7·67}$$

因此，由（7·64）、（7·65）、（7·67）及 $Y(s)$ 是连续函数可得

$$Y(s)=\lim_{n\to\infty}Y(T_n(s))=Y\left(\lim_{n\to\infty}T_n(s)\right)$$

令

$$=Y(\sigma(s))=Y(1)=C \quad (0<s<1)$$

所以

$$X(s)=e^{\frac{\lambda s}{q}}Y(s)=ce^{\frac{\lambda s}{q}}$$

取

$$x'=\left(1,\ \frac{\lambda}{q},\ \left(\frac{\lambda}{q}\right)^2\Big/2!,\ \cdots\right)$$

则x'是左方程的一个非 0 解。因此

$$\Pi=\mathbf{1}x'\cdot e^{-\frac{\lambda}{q}}$$
$$E=R_1^+$$

例7·5（续例6·5）。设$\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$是例6.5所定义的离散的更新过程的年龄，其状态空间为$E=\{0,1,2,\cdots\}$，其转移矩阵为

$$P=(p_{i,j},\ i,j\in E)$$

$$p_{i,j}=\begin{cases}q_i & j=0 \quad i\in E\\ p_i & j=i+1 \quad i\in E\end{cases} \quad 0<q_i,p_i<1$$

$$p_{i,j}=0 \quad (\text{当}j\neq 0,\ j\neq i+1,\ i\in E)$$

即是

$$P=\begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$x'=x'P$ 等价于

$$x_0=\sum_{i=0}^{\infty}x_i q_i$$

$$x_1=p_0x_0$$

$$\vdots$$

$$x_n=p_{n-1}\ x_{n-1}$$

$$\vdots$$

所以 $x'=x'P$ 之解为

$$x_n=p_{n-1}\ p_{n-2}\cdots p_0x_0 \qquad (n\geqslant 1)$$

令

$$\delta=\sum_{n=0}^{\infty}p_0p_1\cdots p_n$$

（1）当 $\delta<\infty$时

$$x'=(1,p_0,p_0p_1,\cdots,p_0p_1\cdots p_n,\cdots)$$

是左方程的一个非0解。所以

$$\Pi=\frac{1}{1+\delta}\cdot 1x'$$

$$E=R_1^+$$

（2）当 $\delta=\infty$时，左方程只有0解，所以$\Pi=0$，$E=N$ 或$E=R_1^0$。为判断$E=N$或$E=R_1^0$。解右 方程。令A是将P划去第0行第0列所得之余阵。解

右方程≪$Ay=y$, $y\geqslant 0$, $y\in(m_{E-\{0\}})$≫，发现：

（a）$\delta=\infty$, $\theta\equiv\prod_{i=0}^{\infty}p_i=0\Rightarrow E=R_1^0$

（b）$\delta=\infty$, $\theta>0\Rightarrow E=N$

习　　题

7·1. 设马尔可夫链$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$的状态空间 $E=\{0, 1\}$，其转移矩阵

$$P=\begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{pmatrix}$$

试求 P^2。再设 $|p_{0,0}+p_{1,1}-1|<1$，试用数学归纳法证明

$$P^n=\frac{1}{2-p_{0,0}-p_{1,1}}\begin{pmatrix} 1-p_{1,1} & 1-p_{0,0} \\ 1-p_{1,1} & 1-p_{0,0} \end{pmatrix}+\frac{(p_{0,0}+p_{1,1}-1)^n}{2-p_{0,0}-p_{1,1}}\begin{pmatrix} 1-p_{0,0} & -(1-p_{0,0}) \\ -(1-p_{1,1}) & 1-p_{1,1} \end{pmatrix}\quad (n\geqslant 1)$$

从而证明

$$\lim_{n\to\infty}p_{0,0}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{1,0}^{(n)}=\frac{1-p_{1,1}}{2-p_{0,0}-p_{1,1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}p_{0,1}^{(n)}=\lim_{n\to\infty}p_{1,1}^{(n)}=\frac{1-p_{0,0}}{2-p_{0,0}-p_{1,1}}$$

2　设有 1, 2, ⋯ ,6 共六个数字，从其中随机地取一个，取中之数字用X_1表之。对 $n>1$，令X_n 是从1, 2, ⋯, X_{n-1}这X_{n-1} 个数字中取中之数字。试证 $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一个马尔可夫链，并求出其状态空间 E，一步，二步转移矩阵。

3　独立地重复抛掷一个硬币，每次抛掷出现正面的概

率为p，$0<p<1$，出现反面的概率为 $q=1-p$。令X_n是前 n 次抛掷中出现正面的总次数，（$n\geqslant 1$），试证$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$是一个马尔可夫链，并求出其状态空间E，一步，二步转移矩阵。

4　设马尔可夫链 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的状态空间E是有限集合，试证E中没有消常返状态；再证Π（平均遍历极限矩阵）没有0列的充要条件是E中没有非常返状态。（所谓一个矩阵有0列，意即它有一列其元素全为0）

5　设$\{X_n, n\geqslant 0\}$是一个马尔可夫链，状态空间$E=\{0,1,\}$，令

$$Z_k(n)=\begin{cases}1 & 当\ X_n=k\\ 0 & 当\ X_n\neq k\end{cases}\qquad k\in E\quad n=1,2,\cdots$$

$$N_k(n)=\sum_{m=1}^{n} Z_k(m)$$

$$N_k(\infty)=\sum_{m=1}^{\infty} Z_k(m)$$

$P=(p_{i,j}, i,j\in E)$是转移矩阵,试说明$N_k(n)$和$N_k(\infty)$的概率意义，并求出$P(N_k(\infty)>0|X_0=j)$（$j,k\in E$）

6　设马尔可夫链$\{X_n, n\geqslant 0\}$的状态空间$E=\{0,1,2,\cdots\}$，转移矩阵$P=(p_{i,j}, i,j\in E)$，$p_{0,0}=a_0$，$p_{0,1}=b_0$，$p_{0,j}=0$，（$j>1$），当 $i\geqslant 1$ 时，$p_{i,i-1}=a_i$，$p_{i,i+1}=b_i$，$p_{i,j}=0$，（当 $i=j$ 或$|i-j|>1$）。且 $a_i+b_i=1$，（$i\in E$），$a_i>0$，（$i\geqslant 1$），$b_i>0$，（$i\geqslant 0$）。试求

$$\pi_{i,j}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} p_{i,j}^{(\nu)}\quad (i,j\in E)$$

并讨论E由什么性质的状态所构成。

§8 可数状态的马尔可夫过程

在这一节中，我们将要研究可数状态的马尔可夫过程的一些基本概念。

定义8·1. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是一族随机变量，每个 X_t 所可能取的值皆属于 E，E 是可数集合（通常 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ 或 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$）。如果对每一个正整数 n 及 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$，$\{i_0,\ i_1,\ \cdots i_n\}\subset E$，都有

$$P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\ \cdots,\ X_{t_1}=i_1,\ X_{t_0}=i_0)$$

$$=P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}) \tag{8·1}$$

（当 $P(X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\ \cdots,\ X_{t_1}=i_1,\ X_{t_{1}0}=i_0)>0$）则称 $\{X_i,\ t\in[0,\infty)\}$ 是一个可数状态的马尔可夫过程，E 称为其状态空间，$T=[0,\infty)$ 称为其时间参数集。

定理8·1. （等价性）设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是一族随机变量，每个 X_t 所可能取的值皆属于 E，E 是一个可数集合。则下列陈述等价

（1）$\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是一个可数状态的马尔可夫过程；

（2）（8·1）式成立；

（3）对任何正整数 m 和 n，任何 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}<\cdots<t_{n+m}$，任何 $\{i_0,\ i_1,\ \cdots,\ i_n,\ i_{n+1},\ \cdots,\ i_{n+m}\}\subset E$，均有

$$P(X_{t_0}=i_0,\ \cdots,\ X_{t_{n-1}}=i_{n-1},\ X_{t_{n-1}}=i_{n+1},$$
$$X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|X_{t_n}=i_n)$$

$$=P(X_{t_0}=i_0,\ \cdots,\ X_{t_{n-1}}=i_{n-1}|X_{t_n}=i_n)$$
$$P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1},\ \cdots,\ X_{t_{n+m}}=i_{n+m}|$$
$$X_{t_n}=i_n) \qquad (8\cdot2)$$

（4）对任何正整数n，任何 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$，任何 $\{i_0,\ i_1,\ \cdots,\ i_n\}\subset E$，均有

$$P(X_{t_0}=i_0,\ X_{t_1}=i_1,\ \cdots,\ X_{t_n}=i_n)$$
$$=\sum_{k\in E}P(X_0=k)P(X_{t_0}=i_0|X_0=k)P(X_{t_1}=i_1|X_{t_0}=$$
$$i_0)\cdot\cdots\cdot P(X_{t_n}=i_n|X_{t_{n-1}}=i_{n-1}) \qquad (8\cdot3)$$

证明仿定理6·1。

定义8·2。 若 $P(X_{t+h}=j|X_{s+h}=i)=P(X_t=j|X_s=i)$，$(i,\ j\in E,\ 0\leqslant s\leqslant t,\ h\geqslant0,\ P(X_s=i)P(X_{s+h}=i)>0)$，则称 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是时齐的。

本节所研究的马尔可夫过程，都是时齐的，可数状态的，所以“时齐的可数状态的”略去不写了。

设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个以E为状态空间的马尔可夫过程，则称

$$p_{i,j}(t)\equiv P(X_{s+t}=j|X_s=i) \qquad (i,j\in E,t\geqslant0)$$

为 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 的“从i出发经时间t达j的转移概率”，简称转移概率。称矩阵

$$P(t)\equiv(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$$

为 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 的转移概率矩阵，简称转移矩阵。显然 $p_{i,j}(t)\geqslant0$，$\sum_{j\in E}p_{i,j}(t)\equiv1$，$(i,\ j\in E,\ t\geqslant0)$。

在这一节中，经常比较矩阵的大小，计算矩阵的极限、微商，积分…，这些运算都是逐元意义的。例如

$$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E),$$
$$R(t)=(r_{i,j}(t),\ i,j\in E),$$

$$P(t)\geqslant R(t)$$

意即 $p_{i,j}(t)\geqslant r_{i,j}(t)$（对一切 $i,j\in E$），

$$P'(t)=(p'_{i,j}(t),\ i,j\in E),$$

$$\int_0^a P(t)dt=\left(\int_0^a p_{i,j}(t)dt,\ i,j\in E\right)$$

命题8·1. 对任一马尔可夫过程 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 的转移矩阵 $P(t)$，总有

$$P(s)P(t)=P(s+t)\qquad (s,\ t\geqslant 0)$$

上式称为（$K-C$）方程式。

注意：$P(s)P(t)$ 总是有意义的，因为它的第 i 行第 j 列的元素为

$$\sum_{k\in E}p_{i,k}(t)p_{k,j}(t)$$

而此级数是非负项级数，每一项 $p_{i,k}(s)p_{k,j}(t)\leqslant p_{i,k}(s)$，所以此级数收敛。

命题 8·1 的证明，作为一个习题留给读者自证。

例8·1. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是 §3 中所定义的泊松过程，则它是一个以 $E=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 为状态空间的马尔可夫过程。其转移矩阵为

$$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0),$$

$$p_{i,j}(t)=\begin{cases}0 & j<i\\ v_{j-i}(t) & j\geqslant i\end{cases}\quad (t\geqslant 0)\qquad (8\cdot 4)$$

$$v_k(t)=e^{-\lambda t}\ \frac{(\lambda t)^k}{k!}\quad (t\geqslant 0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$(8\cdot 5)$$

证. 任取正整数 n，任取 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$，任取

$i_0 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n$，由 $\{X_t, t\in[0, \infty)\}$ 具有独立的平稳增量得知

$$
\begin{aligned}
& P(X_{t_0}=i_0, X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_n}=i_n) \\
= & P(X_{t_0}=i_0, X_{t_1}-X_{t_0}=i_1-i_0, \cdots, \\
& X_{t_n}-X_{t_{n-1}}=i_n-i_{n-1}) \\
= & P(X_{t_0}=i_0)P(X_{t_1-t_0}=i_1-i_0) \\
& \cdots P(X_{t_n-t_{n-1}}=i_n-i_{n-1})
\end{aligned}
\tag{8·6}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& P(X_{t_n}=i_n | X_{t_{n-1}}=i_{n-1}, \cdots, X_{t_1}=i_1, X_{t_0}=i_0) \\
= & P(X_{t_n-t_{n-1}}=i_n-i_{n-1}) \\
= & \nu_{i_n-i_{n-1}}(t_n-t_{n-1})
\end{aligned}
\tag{8·7}
$$

仿之可证

$$P(X_{t_n}=i_n | X_{t_{n-1}}=i_{n-1})=\nu_{i_n-i_{n-1}}(t_n-t_{n-1}) \tag{8·8}$$

这说明对任何正整数 n，任何 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$，任何满足 $i_0\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_n$ 的非负整数，(8·1) 成立。而当条件 $i_0\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_n$ 不成立时，有两种可能

(a) $i_n<i_{n-1}$，则

$$
\begin{aligned}
& P(X_{t_n}=i_n | X_{t_{n-1}}=i_{n-1}, \cdots, X_{t_1}=i_1, X_{t_0}=i_0) \\
= & 0 = P(X_{t_n}=i_n | X_{t_{n-1}}=i_{n-1})
\end{aligned}
$$

(b) $i_0\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_{n-1}$ 不成立。则

$$P(X_{t_{n-1}}=i_{n-1}, \cdots, X_{t_1}=i_1, X_{t_0}=i_0)=0$$

而马尔可夫过程的定义中只要求 (8·1) 式左方的条件概率作为条件的事件有正概率就够了。

所以对任何 $\{i_0, i_1, \cdots, i_n\}\subset E$，(8·1) 式均成立。因此 $\{X_t, t\in[0, \infty)\}$ 是一个马尔可夫过程。而 (8·4) 式的成立是显然的。

定义8·3. 设 E 是一个可数集合，称矩阵

$$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)\qquad (t\in[0,\ \infty))$$

是准转概阵，如果它满足：

(1) $p_{i,j}(t)\geqslant 0$

$$\sum_{j\in E}p_{i,j}(t)\leqslant 1\qquad (i,j\in E,\ t\geqslant 0)$$

(2) $p_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in E}p_{i,k}(s)p_{k,j}(t)$

$$(i,\ j\in E,\ s,\ t\geqslant 0)$$

（即是 $P(s+t)=P(s)P(t)$ 亦即 $(K-C)$ 方程式）。

特别地，若准转概阵 $P(t)$ 满足

$$\sum_{j\in E}p_{i,j}(t)=1\qquad (\text{对一切 } i\in E,\ t\in[0,\ \infty))$$

则称 $P(t)$ 是转概阵。若准转概阵 $P(t)$ 满足

$$\lim_{t\to 0+}p_{i,j}(t)=p_{i,j}(0)=\delta_{i,j}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i\neq j\end{cases}$$

（对一切 $i,j\in E$），则称 $P(t)$ 是标准的。

显然，马尔可夫过程的转移矩阵是转概阵。

定理8·2. 设 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$ 是标准的转概阵，对任何$A\subset E$，令 $P_{i,A}(t)=\sum_{j\in A}p_{i,j}(t)$。则对任何 $i\in E$, $A\subset E$, $0\leqslant s,\ t<\infty$，有

$$|p_{i,A}(t)-p_{i,A}(s)|\leqslant 1-p_{i,i}(|t-s|)\qquad (8\cdot 9)$$

因此，$p_{i,A}(t)$ 对 t 来说在 $[0,\ \infty)$ 上一致连续，且对 $A\subset E$ 是等度的。特别地，$p_{i,j}(t)$ 在 $t\in[0,\ \infty)$ 上一致连续，且对 $j\in E$ 来说是等度的。

证. 不失普遍性，可以假设 $0\leqslant s<t$。由$P(t)$ 满足$(K-C)$ 方程式得知

$$
\begin{aligned}
p_{i,A}(t) &= \sum_{j\in A} p_{i,j}(t) \\
&= \sum_{j\in A} \sum_{k\in E} p_{i,k}(t-s)p_{k,j}(s) \\
&\geqslant \sum_{j\in A} p_{i,i}(t-s)p_{i,j}(t) \\
&= p_{i,i}(t-s)p_{i,A}(s)
\end{aligned}
\qquad (8\cdot 10)
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& p_{i,A}(t)-p_{i,A}(s) \geqslant [p_{i,i}(t-s)-1]p_{i,A}^{(s)} \\
& \geqslant p_{i,i}(t-s)-1 \\
& (i\in E,\ A\subset E,\ 0\leqslant s<t)
\end{aligned}
\qquad (8\cdot 11)
$$

由于（8·11）对一切$A\subset E$均成立，特别地对$E-A$也成立，即是

$$
p_{i,E-A}(t)-p_{i,E-A}(s)\geqslant p_{i,i}(t-s)-1 \qquad (8\cdot 12)
$$

若注意 $p_{i,E-A}(u)=\sum_{j\in E} p_{i,j}(u)-\sum_{j\in A} p_{i,j}(u)$

$$
=1-p_{i,A}(u)
$$

则（8·12）即

$$
p_{i,A}(s)-p_{i,A}(t)\geqslant p_{i,i}(t-s)-1 \qquad (8\cdot 13)
$$

由（8·11），（8·13）得（8·9）。

定理8·3．设 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$ 是标准的转概阵，则

（1）$\lim\limits_{t\to\infty} p_{i,j}(t)=\pi_{i,j} \qquad (i,j\in E) \qquad (8\cdot 14)$

存在，记$\Pi=(\pi_{i,j},\ i,j\in E)$，则$\Pi$是准随机矩阵。

（2）$\Pi P(t)=P(t)\Pi=\Pi^2=\Pi \qquad (t\geqslant 0) \qquad (8\cdot 15)$

证（1）由 $P(t)$ 满足（$K-C$）方程式得

$$p_{i,i}(t)=\sum_{k\in E}p_{i,k}\left(\frac{t}{2}\right)p_{k,i}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\geqslant p_{i,i}\left(\frac{t}{2}\right)^2\geqslant\cdots\geqslant p_{i,i}\left(\frac{t}{2^n}\right)^{2^n}$$

$$(i\in E,\ t\geqslant 0)$$

但是

$$\lim_{t\to 0+}p_{i,i}(t)=1 \qquad (i\in E)$$

所以 $p_{i,i}(t)>0\ (i\in E),\ t\geqslant 0)$ (8•16)

任意固定一对 $i,j\in E$。令 $f(t)=p_{i,j}(t)$，往证 $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)$ 存在。

由 (8•16) 得知：对任意一个 $\tau>0$。$P(\tau)$ 是一个随机矩阵，且以 $P(\tau)=(p_{i,j}(\tau),\ i,j\in E)$ 为一步转移矩阵的马尔可夫链 $\{X_n^{(\tau)},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 的每一个状态 i 都是无周期的，因此，由 §6 关于马尔可夫链的遍历理论得知

$$\lim_{n\to\infty}P(X_{n+m}^{(\tau)}=j\mid X_m^{(\tau)}=i)=\pi_{i,j}(\tau) \quad (i,j\in E) \tag{8•17}$$

存在。但是

$$P(X_{n+m}^{(\tau)}=j|X_m^{(\tau)}=i)$$

是 $P(\tau)^n=P(n\tau)$ 的等 i 行第 j 列的元素，即是

$$P(X_{n+m}^{(\tau)}=j\,|\,X_m^{(\tau)}=i)=p_{i,j}(n\tau) \tag{8•18}$$

由 (8•17)、(8•18) 得

$$\lim_{n\to\infty}f(n\tau)=\lim_{n\to\infty}p_{i,j}(n\tau)=\pi_{i,j}(\tau) \tag{8•19}$$

下面证明对任何 $t_n\uparrow\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) \quad 存在。\tag{8·20}$$

事实上，由定理 8.2 得知 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续，所以，任给 $\varepsilon>0$，必存在 $\tau>0$，使

$$|f(t)-f(s)|<\varepsilon \quad (当|t-s|<\tau) \tag{8·21}$$

对每个 n，可取非负整数k_n，使

$$k_n\tau\leqslant t_n<(k_n+1)\tau$$

所以，由 (8·21) 得

$$f(k_n\tau)-\varepsilon\leqslant f(t_n)\leqslant f(k_n\tau)+\varepsilon \quad (n=1, 2, \cdots) \tag{8·22}$$

在 (8·22) 中令 $n\to\infty$ 并注意 (8.19) 得

$$\pi_{i,j}(\tau)-\varepsilon\leqslant\liminf_{n\to\infty} f(t_n)\leqslant\limsup_{n\to\infty} f(t_n)$$

$$\leqslant\pi_{i,j}(\tau)+\varepsilon$$

由 $\varepsilon>0$ 且可以任意小得知 $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$ 存在。而 $t_n\uparrow\infty$ 可以任意取，所以 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ 存在。（1）证毕。

（2）由（1）及

$$p_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in E} p_{i,k}(t)p_{k,j}(s) \quad (i,j\in E) \tag{8·23}$$

再利用控制收敛定理（参看习题 8·6）在上式中令 $s\to\infty$得

$$\pi_{i,j}=\lim_{s\to\infty} p_{i,j}(s+t)$$

$$=\lim_{s\to\infty}\sum_{k\in E} p_{i,k}(t)p_{k,j}(s)$$

$$=\sum_{k\in E} p_{i,k}(t)\lim_{s\to\infty} p_{k,j}(s)$$

$$=\sum_{k\in E} p_{i,k}(t)\pi_{k,j} \qquad (i,j\in E,\ t\geqslant 0)$$

即 $\Pi=P(t)\Pi \qquad (t\geqslant 0)$ (8·24)

在 (8·23) 中令 $t\to\infty$，并用（1）及法都 (Fatou) 引理（参看习题8·7）：

$$\pi_{i,j}=\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(s+t)\geqslant\sum_{k\in E}\lim_{t\to\infty} p_{i,k}(t)p_{k,j}(s)$$

$$=\sum_{k\in E}\pi_{i,k}p_{k,j}(s) \qquad (i,j\in E,\ s\geqslant 0)$$

即是

$$\Pi\geqslant\Pi P(t) \qquad (t\geqslant 0) \tag{8·25}$$

但是上式左、右两边之矩阵第 i 行之和分别为

$$\sum_{j\in E}\pi_{i,j} \text{ 和 } \sum_{j\in E}\sum_{k\in E}\pi_{i,k}p_{k,j}(t)$$

而

$$\sum_{j\in E}\sum_{k\in E}\pi_{i,k}p_{k,j}(t)=\sum_{k\in E}\pi_{i,k}\sum_{j\in E}p_{k,j}(t)$$

$$=\sum_{k\in E}\pi_{i,k}$$

$$=\sum_{j\in E}\pi_{i,j}$$

所以

$$\Pi=\Pi P(t) \tag{8·26}$$

在上式中令 $t\to\infty$并利用控制收敛定理得

$$\Pi=\Pi^2 \tag{8·27}$$

定理证毕。

定理8·4. 设 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$ 是标准的转

概阵，则

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}=q_i \quad 0\leqslant q_i\leqslant\infty$$

$$(i\in E) \qquad (8\cdot 28)$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{p_{i,j}(t)}{t}=q_{i,j} \quad 0\leqslant q_{i,j}<\infty$$

$$(i\neq j,\ i,j\in E) \qquad (8\cdot 29)$$

$$p_{i,i}(t)\geqslant e^{-q_i t} \qquad (i\in E,\ t\geqslant 0)$$

$$\sum_{j\neq i}q_{i,j}\leqslant q_i \qquad (i\in E) \qquad (8\cdot 30)$$

证明从略。（参看[1]第二编定理3•3、3•4）

若令 $q_{i,i}=-q_i \quad (i\in E)$ 则

$$q_{i,j}=\lim_{t\to 0+}\frac{p_{i,j}(t)-p_{i,j}(0)}{t}=p'_{i,j}(0)$$

$$(i,j\in E)$$

定义8•4．称标准的转概阵 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$ 是可微的，如果

$$p'_{i,j}(0)=\lim_{t\to 0+}\frac{p_{i,j}(t)-p_{i,j}(0)}{t}=q_{i,j}$$

存在且为有限数，$(i,j\in E)$，这时称

$$Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$$

为 $P(t)$ 的密度矩阵，或者称 Q 为 $P(t)$ 所对应的马尔可夫过程的密度矩阵。

由定理 8•4 得知：若标准的转概阵 $P(t)$ 是可微的，则其密度矩阵 $Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$ 必满足

$$q_{i,j}\geqslant 0 \qquad (i\neq j,\ i,j\in E)$$

$$q_{i,i}\leqslant 0 \qquad (i\in E)$$

$$\sum_{j\neq i} q_{i,j} \leqslant -q_{i,i} \quad (i\in E)$$

下面我们研究有限状态的马尔可夫过程的转移矩阵 $P(t)=[p_{i,j}(t),\ i,j\in E]$，（$E$为有限集合）。

定理8·5. 设E是有限集合（不妨令$E=\{0,1,\cdots,n\}$），$P(t)=[p_{i,j}(t),\ i,j\in E]$ 是标准的转概阵，则

（1）$$p'_{i,j}(0)=\lim_{t\to 0+}\frac{[p_{i,j}(t)-p_{i,j}(0)]}{t}$$

$$=q_{i,j} \qquad q_{i,j}\text{为实数} \quad (i,j\in E)$$

$$\sum_{j\in E} q_{i,j}=0 \quad (i\in E)$$

（2）$$p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in E} q_{i,k}p_{k,j}(t)$$

$$=\sum_{k\in E} p_{i,k}(t)q_{k,j}$$

$$(i,j\in E,\ t\geqslant 0)$$

（3）$P(t)=e^{Qt} \qquad (t\geqslant 0)$

其中 $Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$，e^{Qt}定义为

$$e^{Qt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(Qt)^n$$

（4）若记

$$\Pi=(\pi_{i,j},\ i,j\in E)$$

$$\pi_{i,j}=\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t) \quad (i,j\in E)$$

则

$$\sum_{j\in E}\pi_{i,j}=1,\quad (i\in E)，即是\Pi是随机矩阵；$$

（5）$\Pi Q=Q\Pi=0$；

（6）$\pi_{i,j}>0$，$\pi_{i,j}=\pi_j$ 不依赖 i，$(i,j\in E)$ 的充要条件是存在 $t_0>0$，使

$$p_{i,j}(t_0)>0\quad（对一切\ i,j\in E）$$

（7）$\pi_{i,j}=\pi_j$，$(i,j\in E)$ 不依赖 i 的充要条件是

$$\ll x'Q=0,\ x'\geqslant 0,\ \gg$$

的通解为 $c\bar{x}'$，其中 c 为任一非负实数，$\bar{x}'$ 为非 0 向量，且 $\bar{x}'\geqslant 0$。当此条件满足时，令 $\bar{x}'=(\bar{x}_0,\ \bar{x}_1,\ \cdots,\ \bar{x}_n)$，则

$$\pi_{i,j}=\frac{\bar{x}_j}{\sum_{k=0}^{n}\bar{x}_k}\qquad (i,j\in E=\{0,\ 1,\ \cdots,\ n\})$$

这个结果告诉我们：要算 $\pi_{i,j}$，先解 $\ll x'Q=0,\ x'\geqslant 0\gg$。（这是一个有限阶线性方程组，$Q$ 是已知的矩阵，x' 是有限维行向量。）如果其通解是下述形式 $c\bar{x}'$，（其中 c 为任一非负实数，$\bar{x}'$ 是非 0 非负行向量），则 $\pi_{i,j}$ 就算出来了。

证（1）由定理8·4得

$$p'_{i,j}(0)=q_{i,j}\qquad (i,j\in E)$$

$$0\leqslant q_{i,j}<\infty\qquad 0\leqslant -q_{i,i}\leqslant\infty$$
$$(i,j\in E)$$

但是而今 E 是有限集合，

$$\sum_{j\in E}p_{i,j}(t)=1\qquad (i\in E,\ t\geqslant 0)$$

所以

$$0\leqslant -q_{i,i}=\lim_{t\to 0+}\frac{1-p_{i,i}(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sum\limits_{j\neq i}p_{i,j}(t)}{t}$$

$$=\sum_{j\neq i}\lim_{t\to 0+}\frac{p_{i,j}(t)}{t}$$

$$=\sum_{j\neq i}q_{i,j}<\infty \qquad (i\in E)$$

（1）获证。

（2）为 $t>0$ 时

$$\lim_{s\to 0+}\frac{p_{i,j}(t)-p_{i,j}(t-s)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0+}\sum_{k\in E}\left(\frac{p_{i,k}(s)-\delta_{i,k}}{s}\right)p_{k,j}(t-s)$$

$$=\sum_{k\in E}\left(\lim_{s\to 0+}\frac{p_{i,k}(s)-\delta_{i,k}}{s}p_{k,j}(t-s)\right)$$

$$=\sum_{k\in E}q_{i,k}p_{k,j}(t) \qquad (i,j\in E)$$

当 $t\geqslant 0$ 时

$$\lim_{s\to 0+}\frac{p_{i,j}(s+t)-p_{i,j}(t)}{s}$$

$$=\lim_{s\to 0+}\sum_{k\in E}\left(\frac{p_{i,k}(s)-\delta_{i,k}}{s}\right)p_{k,j}(t)$$

$$=\sum_{k\in E}\lim_{s\to 0+}\frac{p_{i,k}(s)-\delta_{i,k}}{s}p_{k,j}(t)$$

$$=\sum_{k\in E} q_{i,k}p_{k,j}(t) \qquad (i,j\in E)$$

总之

$$p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in E} q_{i,k}p_{k,j}(t)$$

$$(i,j\in E,\ t\geqslant 0) \qquad (8\cdot 31)$$

仿之可证

$$p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in E}p_{i,k}(t)q_{k,j}$$

$$(i,j\in E,\ t\geqslant 0) \qquad (8\cdot 32)$$

（注：(8·31) 称为K氏倒退方程式，(8·32) 称为K氏向前方程式。）

（3）由（2），$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$是下列常系数线性微分方程组的解

$$\begin{cases} p'_{i,j}(t)=\sum_{k\in E} q_{i,k}p_{k,j}(t) \\ p_{i,j}(0)=\delta_{i,j}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases} \end{cases} \quad (i,j\in E) \qquad (8\cdot 33)$$

令

$$Q^n=(q_{i,j}(n)\quad i,j\in E)$$

$$q_{i,j}(0)=\delta_{i,j}\quad q_{i,j}(1)=q_{i,j}$$

$$(n\geqslant 0,\ i,j\in E)\quad M\equiv 2\sup_{i\in E}|q_{i,i}|$$ 则

由 $\sum_{j \neq i} q_{i,j} = -q_{i,i}$ 可得

$$|q_{i,j}(n)| \leqslant M^n \qquad (n \geqslant 1,\ i,j \in E)$$

所以

$$r_{i,j}(t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n q_{i,j}(n)$$

在 $t \in [0, \infty)$ 上收敛且逐项可微，且

$$r'_{i,j}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} q_{i,j}(n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \in E} q_{i,k} q_{k,j}(n-1) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{k \in E} q_{i,k} \sum_{n=0}^{\infty} q_{k,j}(n) \frac{t^n}{n!}$$

$$= \sum_{k \in E} q_{i,k} \gamma_{k,j}(t)$$

显然

$$\gamma_{i,j}(0) = \delta_{i,j}$$

所以 $\gamma_{i,j}(t)$ $(i,j \in E)$ 是 (8·33) 的解，从而

$$p_{i,j}(t) = \gamma_{i,j}(t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n q_{i,j}(n) \qquad (i,j \in E)$$

此即

$$P(t)=e^{Qt}$$

(4) $\sum_{j\in E}\pi_{i,j}=\sum_{j\in E}\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t)$

$$=\lim_{t\to\infty}\sum_{j\in E}p_{i,j}(t)$$

$$=1\qquad(i\in E)$$

(5) 由 $\Pi P(t)=P(t)\Pi=\Pi$ 得知

$$\frac{P(t)-I}{t}\Pi=\Pi\frac{P(t)-I}{t}=0\quad(t>0)$$

令 $t\to 0+$ 即得：(其中 I 是单位矩阵)

$$Q\Pi=\Pi Q=0$$

(6) 必要性。设 $\pi_{i,j}>0$，$(i,j\in E)$。由

$$0<\pi_{i,j}=\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t),\quad(i,j\in E),$$

得知存在 $t_{i,j}>0$，当 $t\geqslant t_{i,j}$ 时 $p_{i,j}(t)>0$。而今E为有限集，所以若令

$$t_0=\max\{t_{i,j},\ i,j\in E\}$$

则 $t_0>0$ 是有限数，且 $p_{i,j}(t_0)>0$，(对一切 $i,j\in E$)。必要性得证。

充分性。设存在一个 $t_0>0$，使

$$p_{i,j}(t_0)>0\quad(i,j\in E)$$

则以 $P(t_0)$ 为一步转移矩阵的马尔可夫链 $\{X_n^{(t_0)},\ n=0,1,2,\cdots\}$ 的状态空间E中任意两状态都是互通的。而有限状态的马尔可夫链是没有消常返状态的，(参看 §7 的习题)，所以

$$E=N\quad\text{或者}\quad E=R_1^+$$

而Π是随机矩阵，“$E=N$”不可能成立（否则Π是0矩阵），所以$E=R_1^+$。因此$\pi_{i,j}>0$，$\pi_{i,j}=\pi_j$不依赖i，（$i,j\in E$）。充分性获证。

（7）充分性。设≪$x'Q=0$，$x'\geqslant 0$≫的通解为$c\bar{x}'$，$\bar{x}'=(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$，其中$c$为非负实数，$\bar{x}'\geqslant 0$，$\bar{x}'\neq 0$。

由 $\Pi Q=0$，任取其一行（第i行），有：

$$(\pi_{i,0}, \pi_{i,1}, \cdots, \pi_{i,n})Q=0$$

$$(\pi_{i,0}, \pi_{i,1}, \cdots, \pi_{i,n})\geqslant 0 \quad \sum_{j\in E}\pi_{i,j}=1$$

此即

$$(\pi_{i,0}, \pi_{i,1}, \cdots, \pi_{i,n})$$

是 ≪$x'Q=0$，$x'\geqslant 0$≫的一个非0解。因此

$$(\pi_{i,0}, \pi_{i,1}, \cdots, \pi_{i,n})=c_i\bar{x}' \quad c_i>0$$

但是，

$$1=\sum_{j\in E}\pi_{i,j}=c_i\sum_{j\in E}\bar{x}_j \qquad \sum_{j\in E}\bar{x}_j>0$$

所以 $c_i=c$ 不依赖 $i\in E$。此即

$$\pi_{i,j}=\pi_j=c\bar{x}_j$$

不依赖 $i\in E$。

必要性。设$\pi_{i,j}=\pi_j$不依赖 $i\in E$。则由Π是随机矩阵得知 $E=R_1^+$。所以

$$\pi_j>0,\ \sum_{j\in E}\pi_j=1.$$

设 $x'=(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 是≪$x'Q=0$，$x'\geqslant 0$≫的任一

解，往证

$$x'=c(\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_n) \quad c\geqslant 0$$

事实上，由（3）有

$$P(t)=e^{Qt}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(Qt)^k}{k!}$$

所以

$$x'P(t)=x'+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x'(Qt)^k}{k!}=x'$$

在上式中令 $t\to\infty$ 得

$$x'=x'\Pi$$

即是

$$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

$$=(x_0, x_1, \cdots, x_n)\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_n\\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_n\end{pmatrix}$$

取 $c=\sum_{j\in E}x_j$，则由上式得

$$x'=(x_0, x_1, \cdots, x_n)=c(\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_n)$$

定理证毕。

定义8·5．设E是可数集合，$Q=(q_{i,j}, i,j\in E)$ 是E上的实元素矩阵，若

（1）$\infty>q_{i,j}\geqslant 0$，$\infty>-q_{i,i}\geqslant 0$，$(i,j\in E)$；

（2）$\sum_{j\in E} q_{i,j}\leqslant 0$，　$(i\in E)$，

则称Q是转强阵。若（2）成立等式，则称Q是保守的转强阵。

由定理8·4得知：可微的标准转概阵$P(t)$的密度矩阵是转强阵。由定理8·5得知：有限维的标准转概阵$P(t)$一定是可微的，从而其密度矩阵一定是转强阵。定理8·5还说明，有限维标准转概阵由其密度矩阵所唯一决定，（因为$P(t)=e^{Qt}$）。现在问：一般的（不一定有限维）可微的标准转概阵是否由其密度矩阵所唯一决定呢？回答是否定的。再问：给定任一转强阵Q，是否恒存在一个可微的标准转概阵$P(t)$，使其密度矩阵就是Q？回答仍是未必对。但是，我们有下列

定理8·6。设$Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$是任意一个转强阵，E是任意一个可数集合，$q_i=-q_{i,i}$，$(i\in E)$。$D_q=\text{diag}\ (q_i,\ i\in E)$，即是$D_q$是一个对角型矩阵，其主对角线上第$i$行的元素为$g_i$，，主对角线以外的元素为0，再令$S=Q+D_q=(s_{i,j},\ i,j\in E)$，$\Delta(t)\text{diag}(e^{-q_i t},\ i\in E)$。

（1）令

$$P_0(t)=\Delta(t)$$

$$P_n(t)=\int_0^t \Delta(t-u)SP_{n-1}(u)du,\quad (n\geqslant 1,\ t\geqslant 0)$$

$$P(t)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)$$

$$\overline{P}(t)=(\overline{p}_{i,j}(t),\ i,j\in E)$$

则 $\overline{P}(t)$ 是一个标准的准转概阵，且

$$\overline{P}'(0)=Q$$

即是

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{p}_{i,j}(t)-\overline{p}_{i,j}(0)}{t}=q_{i,j}\quad (i,j\in E)$$

而且对任何满足 $P'(0)=Q$ 的标准的准转概阵 $P(t)$，有 $P(t)\geqslant\overline{P}(t)$。还有 $\overline{P}(t)Q=Q\overline{P}(t)=\overline{P}'(t)$ $(t\geqslant 0)$

（2）设 Q 是保守的转强阵，则必存在一个标准的转概阵 $P(t)$，使 $P'(0)=Q$。

（3）若 Q 是保守的转强阵，记 $I=(\delta_{i,j},\ i,j\in E)$ 是单位矩阵，$y=\begin{pmatrix} y_i \\ i\in E\end{pmatrix}$ 是列向量，则 $\overline{P}(t)$ 是一个标准的转概阵的充要条件是方程式

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ \sup_{i\in E} y_i<\infty\gg$$

只有 0 解（其中 λ 是固定的正数）。

（4）若 $\sup\limits_{i\in E} q_i<\infty$，则存在唯一一个标准的准转概阵 $P(t)$，满足

$$P'(0)=Q$$

证明请参看[1]。

我们为什么要提出密度矩阵（转强阵）并研究它与转移矩阵（转概阵）的关系呢？因为对许多马尔可夫过程，其转移矩阵很难求，而其密度矩阵到是比较容易求，且某些马尔可夫过程的统计规律性往往是通过密度矩阵来刻划的。

习　　题

8·1. 证明命题8·1。

8·2. 设 $Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$ 是标准转概阵的密度矩阵，若 $\sup\limits_{i\in E}(-q_{i,i})<\infty$，则

$$\lim_{t\to 0+} p_{i,i}(t)=1$$

对 $i\in E$ 一致成立。

8·3. 设定义在 $[a,b]$ 上的实值函数 $g(t)$ 具有连续导数，$h(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，μ 是一个实数。试证微分方程式

$$g'(t)+\mu g(t)=h(t)\qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

的解为

$$g(t)=\int_a^t e^{-\mu(t-s)}h(s)ds+g(a)e^{-\mu(t-a)}\qquad (a\leqslant t\leqslant b)$$

（提示：令 $G(t)=e^{\mu t}g(t)$，则有 $G'(t)=e^{\mu t}h(t)$）

8·4. 设 $\{X_t,\ t\geqslant 0\}$ 是以 $E=\{0,1\}$ 为状态空间的马尔可夫过程，$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j=0,1)$为其转移矩阵。设 $P(t)$ 是标准的且

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-p_{0,0}(t))=q_0=\lambda$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-p_{1,1}(t))=q_1=\mu$$

试求出 $P(t)$。

（提示：令Q为 $P(t)$ 的密度矩阵，由于E是有限集合，故

Q必为保守的转强阵。再利用

$P'(t)=P(t)Q$，$P(t)$ 是随机阵及习题(8·3)

8·5. （续习题8·4）。设 $p_0=P(X_0=0)$，$0<p_0<1$，试求

$$\mathbf{E}(X_t) \qquad \mathrm{Var}(X_t)$$

8·6. 设E是可数集合，若对每个 $k\in E$，有

$$\lim_{t\to\infty} a_k(t)=a_k$$

存在，且 $|a_k(t)|\leqslant B_k \quad (k\in E,\ t\geqslant 0)$

$$\sum_{k\in E} B_k<\infty$$

则

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k\in E} a_k(t)=\sum_{k\in E}\lim_{t\to\infty} a_k(t)=\sum_{k\in E} a_k$$

（这就是所谓控制收敛定理。）

8·7. 设E是可数集合，若对每个 $k\in E$，有

$$\lim_{t\to\infty} a_k(t)=a_k$$

存在，且

$$a_k(t)\geqslant 0 \quad (k\in E,\ t\geqslant 0)$$

则

$$\sum_{k\in E}\{\lim_{t\to\infty} a_k(t)\}\leqslant\lim_{t\to\infty}\inf\sum_{k\in E} a_k(t)$$

（这就是所谓法都（Fatou）引理。）

§9 生灭过程

在这一节中，我们将要研究一类特殊的马尔可夫过程—生灭过程。

定义9·1。设 $\{X_t, t\in[0, \infty)\}$ 是一个以 $E=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 为状态空间的马尔可夫过程，$P(t)=(p_{i,j}(t), i, j\in E)$ 是其转移矩阵，$Q=(q_{i,j}, i,j\in E)=P'(0)$ 是其密度矩阵。如果

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{9·1}$$

其中 $\lambda_0\geqslant0$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots>0$, $\mu_1, \mu_2, \cdots>0$，(即是 $q_{0,0}=-\lambda_0$, $q_{0,1}=\lambda_0$, $q_{0,j}=0$ 当 $j\geqslant2$，而当 $i\geqslant1$ 时，$q_{i,i}=-(\lambda_i+\mu_i)$，$q_{i,i+1}=\lambda_i$, $q_{i,i-1}=\mu_i$, $q_{i,j}=0$ (当 $|j-i|>1$))，则称 $\{X_t, t\in[0, \infty)\}$ 是一个生灭过程。

撇开概率背景，纯分析地说，任意一个形如 (9·1) 的矩阵都称为一个生灭转强阵。显然生灭转强阵都是保守的。

下面我们看一个具体的生灭过程的例子。

例9·1。设有一轮船码头，在 $[0, t)$ 时间区间内来到

此码头要求装卸货的轮船数 $X_t(t\geqslant 0)$ 构成一个以 λ 为强度的泊松过程，即是

$$P(X_t=k)=v_k(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\quad t\geqslant 0) \qquad (9\cdot 2)$$

再设每条轮船装卸货的时间 T 是一个服从负指数分布的随机变量，即是

$$P(T<t)=\begin{cases}1-e^{-\mu t} & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases} \qquad (9\cdot 3)$$

而各条船的装卸货的时间相互独立，且与到来的轮船亦相互独立。令 η_t 是时刻 t 码头内之轮船数。则 $\{\eta_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个生灭过程，其密度矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots\\ \mu & -(\lambda+\mu) & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$(9\cdot 4)$$

证　令 $A_k(t)=\{$在 $[0,\ t)$ 内有 k 条轮船离码头$\}$，$B_k(t)=\{X_t=k\}=\{$在 $[0,\ t)$ 内有 k 条轮船进码头$\}$，$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$。T_i 是第 i 条船的装卸货时间，$(i=1,\ 2,\ \cdots)$。由于 T 服从负指数分布，所以对任意一条船，若已知"它在时刻 t_1 到码头，且在时刻 t_2 尚未离码头（$t_2\geqslant t_1$）"，而且时刻 t_2+t 仍未离码头的概率

$$\begin{aligned}&P(T>t_2-t_1+t\,|\,T>t_2-t_1)\\ =&\frac{P(T>t_2-t_1+t)}{P(T>t_2-t_1)}\\ =&e^{-\mu t}=P(T>t)\end{aligned}$$

不依赖t_1和t_2。因此，时刻0在码头的任一条船（不管它以前何时到码头）在时刻t尚未离开码头的概率为

$$P(T>t)=e^{-\mu t}$$

所以由独立性假设知

$$\begin{aligned}
&P(A_0(t)B_0(t)\mid\eta_0=i)\\
&=P(\{X_t=0\}\cap\bigcap_{s=1}^{i}\{T_s>t\})\\
&=e^{-\lambda t}e^{-i\mu t}
\end{aligned}\tag{9·5}$$

$$P(A_0(t)\mid\eta_0=i)\geqslant e^{-\lambda t}e^{-i\mu t}\tag{9·6}$$

因此

$$\lim_{t\to 0+}P(A_0(t)\mid\eta_0=i)=1$$

即

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0+}P\left(\bigcup_{r=1}^{i}\{T_r<t\}\right)\\
&=\lim_{t\to 0+}P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k(t)\middle|\eta_0=i\right)\\
&=0
\end{aligned}\tag{9·7}$$

而

$$\begin{aligned}
&p_{i,i}(t)\equiv P(\eta_t=i\mid\eta_0=i)\\
&=\frac{P(\eta_0=i,\ \eta_t=i)}{P(\eta_0=i)}\\
&=\frac{P\left(\{\eta_0=i\}\cap\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}B_k(t)\cap A_k(t)\right)\right)}{P(\eta_0=i)}
\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} P(B_k(t)\cap A_k(t)\mid\eta_0=i) \tag{9·8}$$

但是，由（9·5）有

$$\lim_{t\to 0+}\frac{P(B_0(t)\cap A_0(t)\mid\eta_0=i)-1}{t}$$

$$=-(\lambda+i\mu) \tag{9·9}$$

而

$$0\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k(t)A_k(t)\mid\eta_0=i)}{t}$$

$$\leqslant\frac{P(B_1(t)A_1(t)\mid\eta_0=i)}{t}+\frac{\sum_{k=2}^{\infty}v_k(t)}{t}$$

$$\leqslant\frac{P(X_t=1,\ \bigcup_{r=1}^{i+1}\{T_r<t\}\mid\eta_0=i)}{t}+\frac{\sum_{k=2}^{\infty}v_k(t)}{t}$$

$$=\frac{v_1(t)}{t}P\left(\bigcup_{r=1}^{i+1}\{T_r<t\}\right)+\frac{\sum_{k=2}^{\infty}v_k(t)}{t}$$

$$=\lambda e^{-\lambda t}P\left(\bigcup_{r=1}^{i+1}\{T_r<t\}\right)+\frac{\sum_{k=2}^{\infty}v_k(t)}{t} \tag{9·10}$$

由（9·7）及$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\sum_{k=2}^{\infty}v_k(t)=0$，在（9·10）中令 $t\to$

0+ 即得

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\sum_{k=1}^{\infty}P(B_k(t)A_k(t)|\eta_0=i)}{t}=0 \qquad (9\cdot 11)$$

以 (9·9)·(9·11) 代入 (9·8) 得

$$\lim_{t\to 0+}\frac{p_{i,i}(t)-1}{t}=-(\lambda+i\mu) \qquad (i\in E)$$

(9·12)

仿 (9·8) 有

$$p_{i,i+1}(t)=\sum_{k=1}^{\infty} P(B_k(t)A_{k-1}(t)|\eta_0=i)$$

$$(i\in E) \qquad (9\cdot 13)$$

所以由 (9·7) 和 $P(X_t=1, \bigcap_{r=1}^{i+1}\{T_r>t\})$

$$\leqslant P(B_1(t)A_0(t)|\eta_0=i)$$

$$\leqslant P(X_t=1, \bigcap_{r=1}^{i}\{T_r>t\})$$

及 $P(B_k(t))=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ 可得

$$\lim_{t\to 0+}\frac{p_{i,i+1}(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left[\frac{P(B_1(t)A_0(t)|\eta_0=i)}{t}\right.$$

$$+\frac{\sum_{k=2}^{\infty} P(B_k(t)A_{k-1}(t)|\eta_0=i)}{t}\Bigg]$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{P(B_1(t)A_0(t)|\eta_0=i)}{t}$$

$$=\lambda \qquad\qquad (i\in E) \qquad\qquad (9\cdot 14)$$

当 $i=1, 2, \cdots, j=i-1$ 时，仿 (9·8) 有

$$p_{i,i-1}(t)=\sum_{k=1}^{\infty} P(B_{k-1}(t)A_k(t)|\eta_0=i) \qquad (9\cdot 15)$$

所以

$$\lim_{t\to 0+}\frac{p_{i,i-1}(t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\Bigg[\frac{P(B_0(t)A_1(t)|\eta_0=i)}{t}$$

$$+\frac{\sum_{k=2}^{\infty} P(B_{k-1}(t)A_k(t)|\eta_0=i)}{t}\Bigg] \qquad (9\cdot 16)$$

而 $$\lim_{t\to 0+}\frac{P(B_0(t)\cap A_1(t)|\eta_0=i)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{e^{-\lambda t}C_i^1(1-e^{-\mu t})(e^{-\mu t})^{i-1}}{t}$$

$$=i\mu \qquad\qquad (9\cdot 17)$$

$$0 \leqslant \frac{\sum\limits_{k=2} P(B_{k-1}(t)A_k(t)|\eta_0=i)}{t}$$

$$\leqslant \frac{P(B_1(t)A_2(t)|\eta_0=i)}{t}$$

$$+\frac{\sum\limits_{k=3}^{\infty} P(B_{k-1}(t))}{t}$$

$$\leqslant \frac{P(X_i=1,\ T_1,\ \cdots,\ T_{i+1}\ \text{中至少有两个小于}\ t)}{t}$$

$$+\frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty} P(B_k(t))}{t}$$

由（9·7）及 $P(B_k(t))=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}$ 知：在上式中令

$t\to 0+$ 得

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\sum\limits_{k=2}^{\infty} P(B_{k-1}(t)A_k(t)|\eta_0=i)}{t}=0$$

(9·18)

以（9·17）、（9·18）代入（9·16）得

$$\lim_{t\to 0+}\frac{p_{i,i-1}(t)}{t}=i\mu \quad (i\geqslant 1) \tag{9·19}$$

而对任何 $j>i+1$，有

$$p_{i,j}(t)=P(\eta_t=j|\eta_0=i)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} P(B_{k+j-i}(t)A_k(t)|\eta_0=i)$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} P(B_{k+j-i}(t)) \leqslant \sum_{m>1}^{\infty} P(B_m(t))$$

$$=0(t) \qquad (t\to 0_+)$$

所以

$$\lim_{t\to 0+} \frac{p_{i,j}(t)}{t}=0 \qquad (\text{当 } j>i+1) \qquad (9\cdot 20)$$

仿（9·20）可证

$$\lim_{t\to 0+} \frac{p_{i,j}(t)}{t}=0 \qquad (\text{当 } i>j+1) \qquad (9\cdot 21)$$

总之，由（9·12）、（9·14）、（9·19）、（9·20）、（9·21）得

$$P'(0)=Q$$

是形如（9·4）之矩阵。而 $\{\eta_t, t\in[0,\infty)\}$ 是时齐的马尔可夫过程由

$$P(\eta_{t_n+t}=j \mid \eta_{t_1}=i_1, \eta_{t_2}=i_2, \cdots, \eta_{t_n}=i_n)$$

$$=\sum_{q+r=j} P((X_{t_n+t}-X_{t_n})=r, \quad T_1, \cdots, T_{i_n} \text{ 恰有 } q \text{ 个大于 } t)$$

$$=P(\eta_{t_n+t}=j \mid \eta_{t_n}=i_n) \qquad \text{与} t_n \text{无关}$$

可知，（此处 n 是任一正整数，$0\leqslant t_1<\cdots<t_n$，$t\geqslant 0$，$i_1, \cdots, i_n, j\in E$）。

至此，我们完全证明了 $\{\eta_t, t\in[0,\infty)\}$ 是一个以（9·4）为密度矩阵的生灭过程。

定理9·1．设

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

是一个生灭转强阵。则下列陈述等价

（1）$\bar{P}(t)$ 是标准的转概阵，（$\bar{P}(t)$ 的定义见定理8·6）；

（2）≪ $(\lambda I-Q)y=0$，$y\geqslant 0$，$\sup\limits_{i\geqslant 0} y_i<\infty$ ≫ 只有0解；

（3）$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots\lambda_n}=\infty \qquad (9\cdot 22)$$

为证此定理先证明

引理9·1。给定实数 $z_1>z_0\geqslant 0$，及 $f_n>0$，$g_n>0$，$(n\geqslant 1)$，用递推公式

$$z_{n+1}-z_n=f_nz_n+g_n(z_n-z_{n-1}) \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots) \qquad (9\cdot 23)$$

来定义 $\{z_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$，（显然 $0\leqslant z_0<z_1<z_2\cdots$）。则

$$\sup_{n\geqslant 0} z_n<\infty \qquad (9\cdot 24)$$

的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_kg_{k+1}\cdots g_n<\infty \qquad (9\cdot 25)$$

证　令 $u_n=z_{n+1}-z_n$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 则

$$u_n = f_n z_n + g_n u_{n-1} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \qquad (9\cdot 26)$$

再令

$$v_n = \frac{u_n}{g_1 g_2 \cdots g_n} \quad (n \geqslant 1) \quad v_0 = 0 \qquad (9\cdot 27)$$

则有

$$g_1 g_2 \cdots g_n v_n = f_n z_n + g_1 \cdots g_n v_{n-1} \quad (n \geqslant 1)$$

即是

$$v_n - v_{n-1} = \frac{f_n z_n}{g_1 g_2 \cdots g_n} \quad (n \geqslant 1) \qquad (9\cdot 28)$$

所以

$$v_n = v_0 + \sum_{k=1}^{n} (v_k - v_{k-1})$$

$$= z_1 - z_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k z_k}{g_1 \cdots g_k} \quad (n \geqslant 1)$$

因此

$$u_n = g_1 \cdots g_n v_n$$

$$= g_1 \cdots g_n (z_1 - z_0) + \sum_{k=1}^{n} f_k g_{k+1} \cdots g_n z_k \quad (n \geqslant 1)$$

亦即

$$z_{n+1} - z_n = g_1 \cdots g_n (z_1 - z_0) + \sum_{k=1}^{n} f_k g_{k+1} \cdots g_n z_k$$

$$(n \geqslant 1) \qquad (9\cdot 29)$$

必要性。因为由（9·29）有

$$z_{n+1}-z_n \geqslant z_1 \sum_{k=1}^{n} f_k g_{k+1} \cdots g_n$$

所以

$$z_{n+1}=\sum_{l=1}^{n}(z_{l+1}-z_l)+z_1$$

$$=z_1+z_1 \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} f_k g_{k+1} \cdots g_l \qquad (n \geqslant 1)$$

因为 $z_1>0$，$\sup\limits_{n \geqslant 0} z_n<\infty$，所以

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{l} f_k g_{k+1} \cdots g_l<\infty$$

充分性。因为

$$z_{n+1}-z_n$$

$$=g_1 \cdots g_n(z_1-z_0)+\sum_{k=1}^{n} f_k g_{k+1} \cdots g_n z_k$$

$$\leqslant\left(g_1 \cdots g_n+\sum_{k=1}^{n} f_k g_{k+1} \cdots g_n\right) z_n \qquad (n \geqslant 1)$$

令

$$F_n=\left(g_1 \cdots g_n+\sum_{k=1}^{n} f_k g_{k+1} \cdots g_n\right)$$

则

$$z_{n+1}\leqslant(1+F_n)z_n \qquad (n\geqslant 1) \tag{9·30}$$

逐次递推得

$$z_{n+1}\leqslant(1+F_n)(1+F_{n-1})\cdots(1+F_1)z_1$$

$$\leqslant z_1 e^{\sum_{k=1}^{n} F_k} \qquad (n\geqslant 1) \tag{9·31}$$

若（9·25）成立，则更有

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_1 g_2\cdots g_n<\infty \tag{9·32}$$

由 $f_1>0$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_1 g_2\cdots g_n<\infty \tag{9·33}$$

由（9·25）、（9·33）知

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n= \sum_{n=1}^{\infty}\left(g_1\cdots g_n+\sum_{k=1}^{n} f_k g_{k+1}\cdots g_n\right)<\infty \tag{9·34}$$

由（9·31)、(9·34）得

$$\sup_{n\geqslant 0} z_n<\infty$$

引理证毕。

现在我们来证明定理9·1。

由于生灭转强阵必为保守的，所以由定理 8·6 得知“（1)$\Longleftrightarrow$(2）”。

解方程式

$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ y\neq 0\gg$，$(\lambda>0)$，即是解（注意现在$Q$的形式如定理9·1中之$Q$）

$$(\lambda+\lambda_0)y_0=\lambda_0 y_1$$
$$(\lambda+\lambda_1+\mu_1)y_1=\mu_1 y_0+\lambda_1 y_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\lambda+\lambda_n+\mu_n)y_n=\mu_n y_{n-1}+\lambda_n y_{n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y=\begin{pmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ \vdots\end{pmatrix}\qquad y\geqslant 0\qquad y\neq 0\qquad \lambda>0$$

当 $\lambda_0=0$ 时，上述方程组中y_0必为0，y_1可为>0的任一数（若 $y_1=0$，必有 $y_n\equiv 0$，$n\geqslant 0$），而且诸y_n满足

$$\lambda_n(y_{n+1}-y_n)=\lambda y_n+\mu_n(y_n-y_{n-1})\qquad (n\geqslant 1)\tag{9·35}$$

当 $\lambda_0>0$ 时，上述方程组中y_0可为>0的任一数（若 $y_0=0$，则 $y_n\equiv 0$，$n\geqslant 0$），而且诸y_n满足

$$y_1=y_0+\frac{\lambda}{\lambda_0}y_0>y_0$$

$$\lambda_n(y_{n+1}-y_n)=\lambda y_n+\mu_n(y_n-y_{n-1})\quad (n\geqslant 1)$$

所以无论 $\lambda_0=0$ 或 $\lambda_0>0$，$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ y\neq 0\gg$的通解总是

$$\begin{cases} y_1>y_0\geqslant 0\\ y_{n+1}-y_n=\dfrac{\lambda}{\lambda_n}y_n+\dfrac{\mu_n}{\lambda_n}(y_n-y_{n-1})\end{cases}\tag{9·36}$$

把 $\frac{\lambda}{\lambda_n}$、$\frac{\mu_n}{\lambda_n}$ 视为引理9·1中之f_n和g_n，则由引理9·1得知

$$“\sup_{n\geqslant 0} y_n<\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{\lambda_k}\frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}}\cdots\frac{\mu_n}{\lambda_n}<\infty”$$

亦即

$$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ \sup_{n\geqslant 0} y_n<\infty\gg$$

只有0解的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda\mu_{k+1}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n}=\infty$$

这就证明了（2）$\Longleftrightarrow$（3）。定理证毕。

系1. 若 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个生灭过程，其密度矩阵Q由（9·1）式所定义，且满足（9·22），即是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_n}{\lambda_k\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots\lambda_n}=\infty$$

则 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 的转移矩阵 $P(t)=\bar{P}(t)$，其中 $\bar{P}(t)$ 由定理8·6所定义。

证。由于Q满足（9·22），所以由定理9·1得知 $\bar{P}(t)$ 是标准的转概阵。由定理8·6有 $\bar{P}'(0)=Q$。而今 $P(t)$ 和Q分别为 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 的转移矩阵和密度矩阵，故必有 $P(t)$ 是标准的转概阵，且 $P'(0)=Q$。再用定理8·6得知：$P(t)\geqslant\bar{P}(t)$，$(t\geqslant 0)$。即是若令 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$，$\bar{P}(t)=(\bar{p}_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$，则有 $p_{i,j}(t)\geqslant\bar{p}_{i,j}(t)$，$(t\geqslant 0,\ i,j\geqslant 0)$。谬设有一对$i_0$和$j_0$和$t_0$，使

$$p_{i_0,j_0}(t_0)>\bar{p}_{i_0,j_0}(t_0)$$

则由 $P(t)$ 和 $\bar{P}(t)$ 皆为转概阵得知

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{i_0,j}(t_0) \\
&= p_{i_0,j_0}(t_0) + \sum_{j \neq j_0} p_{i_0,j}(t_0) \\
&> \bar{p}_{i_0,j_0}(t_0) + \sum_{j \neq j_0} \bar{p}_{i_0,j}(t_0) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \bar{p}_{i_0,j}(t_0) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

这就得出了 $1>1$ 的矛盾。所以恒有

$$p_{i,j}(t) \equiv \bar{p}_{i,j}(t) \qquad (i,j \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$$

即是 $P(t) \equiv \bar{P}(t)$

系1告诉我们：若生灭过程的密度矩阵 Q 满足（9·22）式，则此生灭过程的转移矩阵 $P(t)$ 由 Q 所完全决定。$P(t)=\bar{P}(t)$ 的构造方法如定理8·6。

定义 9·2。设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个以 $E=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 为状态空间的马尔可夫过程，$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\in E)$ 是其转移矩阵，$P'(0)=Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$ 如果

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad (9\cdot 37)$$

$\lambda_i>0,(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，即是 $q_{i,i}=-\lambda_i$，$q_{i,i+1}=\lambda_i$，$(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，$q_{i,j}=0$（当 $j\neq i$ 或 $i+1$，$i\in E$），则称 $\{X_t\ \ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个纯生过程。

撇开概率背景，纯分析地说，任意一个形如（9·37）的矩阵都称为一个纯生转强阵。显然纯生转强阵都是保守的。

例9·2。设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个以 λ 为强度的泊松过程，$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 为其转移矩阵，则

$$p_{i,j}(t)=\begin{cases} v_{j-i}(t)=e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & j\geqslant i \\ 0 & j<i \end{cases}$$

$(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ t\geqslant 0)$，其密度矩阵 $Q=(q_{i,j},\ i,j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)=P'(0)$ 有下述形式

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

所以 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个纯生过程。

类似定理 9·1，我们有

定理 9·2。设

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \tag{9·37}$$

$(\lambda_i>0,\ (i=1,\ 2,\ \cdots),\ \lambda_0\geqslant 0)$ 是一个纯生转强阵，则下列陈述等价

（1）$\bar{P}(t)$ 是标准的转概阵，（$\bar{P}(t)$ 之定义见定理8·6p）；

（2）$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ \sup\limits_{i\geqslant 0} y_i<\infty\gg$只有0解，（其中 $\lambda>0$）；

（3）$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$。 (9·38)

证 由于纯生转强阵必为保守的，所以由定理8·6得知："（1）$\Longleftrightarrow$（2）"。

由于Q具有（9·37）的形式，所以解

$\ll(\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ \sup\limits_{i\geqslant 0} y_i<\infty\gg$

即是解

$\ll(\lambda+\lambda_n)y_n-\lambda_n y_{n+1}=0,\ y_n\geqslant 0,\ (n\geqslant 0),\ \sup\limits_{n\geqslant 0} y_n<\infty\gg$

而

$$(\lambda+\lambda_n)y_n-\lambda_n y_{n+1}=0, \qquad (n\geqslant 0) \tag{9·39}$$

即是

$$y_{n+1}=\begin{cases}\left(1+\dfrac{\lambda}{\lambda_n}\right)y_n=\cdots=y_0\prod\limits_{i=0}^{n}\left(1+\dfrac{1}{\lambda_i}\right) & (\lambda_0>0)\\[2ex] \left(1+\dfrac{\lambda}{\lambda_n}\right)y_n=\cdots=y_1\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{\lambda_i}\right) & y_0=0\\ & (\lambda_0=0)\end{cases} \quad (n\geqslant 0)$$

因此

$$\ll (\lambda I-Q)y=0,\ y\geqslant 0,\ \sup_{i\geqslant 0} y_i<\infty \gg$$

仅有 0 解的充要条件是

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\lambda_i}\right)$$

发散，这等价于 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$。这就证明了

$$\text{“(2)} \Longleftrightarrow \text{(3)”}。$$

定理证毕。

由定理 9·2 和定理 8·6 看出：

系1. 若 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个纯生过程，其密度矩阵 Q 如 (9·37) 且满足 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$，则其转移矩阵 $P(t)$ 必为 $\bar{P}(t)$，其中 $\bar{P}(t)$ 由定理 8·6 给出。

证 完全仿照定理 9·1 中的系 1 的方法证明。只不过把那里应用定理 9·1 的地方改为应用定理 9·2 而已。

注 在系 1 条件下，$P(t)$ 也可由解 $P'(t)=QP(t)$ 得到。

系 2. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是满足系 1 中的条件的纯生过程。$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$ 为其转移函数，则

$$p_{i,j}(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } j<i\\ e^{-\lambda_i t} & \text{当 } j=i\\ e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{\lambda_j s}\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(s)ds & \text{当 } j>i\end{cases} \tag{9·40}$$

证. 记 $Q=(q_{i,j},\ i,j\geqslant 0)$, $q_i=-q_{i,i}=\lambda_i$, 则

$$D_q=\operatorname{diag}(q_i,\ i\geqslant 0)$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$S=Q+D_q=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Delta(t)=\operatorname{diag}(e^{-q_i t},\ i\geqslant 0)$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-\lambda_0 t} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_2 t} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\Delta(t-u)S$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 e^{-\lambda_0(t-u)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 e^{-\lambda_1(t-u)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-u)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

再令 $P_0(t)=\Delta(t)$

$$P_n(t)=\int_0^t \Delta(t-u)\,S\,P_{n-1}(u)du, \qquad (n\geqslant 1)$$

$$\bar{P}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)=(\bar{p}_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$$

$$P_n(t)=(p_{i,j}^{<n>}(t),\quad i,j\geqslant 0)$$

$$\Delta(t)S=(\alpha_{i,j}(t),\quad i,j\geqslant 0)$$

$$\Delta(t)S\,P_n(u)=(\beta_{i,j}^{<n>}(t,\ u),\quad i,j\geqslant 0)$$

则 $\alpha_{i,j}(t)\equiv 0 \quad (当\ j\leqslant i) \qquad (9\cdot 40)^*$

显然

$$p_{i,j}^{<0>}(t)\equiv 0 \quad 当\ j<i \tag{9·41}$$

设

$$p_{i,j}^{<n>}(t)\equiv 0 \quad 当\ j-n<i \tag{9·42}$$

则由 (9·40)*, (9·42) 及 $\beta_{i,j}^{<n>}(t,\ u)$ 之定义得

$$\beta_{i,j}^{<n>}(t,\ u)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{i,k}(t)p_{k,j}^{<n>}(u)$$

$$=\sum_{j-n\geqslant k>i}\alpha_{i,k}(t)p_{k,j}^{<n>}(u)$$

$$\equiv 0 \quad (当\ j-(n+1)<i) \tag{9·43}$$

因此

$$p_{i,j}^{<n+1>}(t)=\int_0^t\beta_{i,j}^{<n>}(t-u,\ u)du$$

$$\equiv 0 \quad (当(j-(n+1))<i) \tag{9·44}$$

归纳法完成。所以对一切 $n\geqslant 0$, $t\in[0,\ \infty)$ 有

$$p_{i,j}^{<n>}(t)\equiv 0 \quad (当\ j-n<i) \tag{9·45}$$

而

$$p_{i,j}(t)=\bar{p}_{i,j}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{i,j}^{\langle n\rangle}(t)$$

所以

$$p_{i,j}(t)=0 \quad 当 \ (j<i,\ t\in[0,\ \infty)) \qquad (9\cdot46)$$

(9·40) 中第一个等式证毕。

又因为

$$P'(t)=P(t)Q \qquad (t\in[0,\ \infty))$$

即是 (注意(9·46) 及 $q_{k,j}=0$ 当 $j\neq k$ 和 $k+1$)

$$P'_{i,j}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}p_{i,k}(t)q_{k,j}$$

$$=\sum_{k=i}^{\infty}p_{i,k}(t)q_{k,j}$$

$$=\begin{cases}-\lambda_i p_{i,i}(t) & 当\ i=j\\ -\lambda_j p_{i,j}(t)+\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) & 当\ j>i\end{cases} \qquad (9\cdot47)$$

直接解 (9·47) (注意初值 $p_{i,j}(0)=\delta_{i,j}$) 即得 (9·40) 中的第二和第三个等式。系 2 证毕。

例9·3。设 $\{X_t, t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个纯生过程，其密度矩阵 $Q=(q_{i,j},\ i,j\geqslant0)$ 如下

$$q_{i,i}=-\lambda \qquad q_{i,i+1}=\lambda \qquad (i\geqslant0)$$

$$q_{i,j}=0 \qquad (当\ j\neq i,\ j\neq i+1\ 时) \qquad (i\geqslant0)$$

$$\lambda>0$$

则 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 必为泊松过程，即是纯生过程的生殖率 $q_i\equiv-q_{i,i}\equiv\lambda$ 常数时，此纯生过程必为泊松过程。

证　由定理 9·2 的系 1 及例 9·2 即可证明此事实。

例9·4. （具有线性生殖率的纯生过程）

设 $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 是一个纯生过程，其密度矩阵 $Q=(q_{i,j}, i,j\in E)$ 如下

$$q_{i,i}=-\lambda_i=-i\lambda \quad q_{i,i+1}=i\lambda \qquad (i\geqslant 0)$$
$$q_{i,j}=0 \quad (\text{当 } j\neq i,\ j\neq i+1 \text{ 时}) \quad (i\geqslant 0)$$
$$\lambda>0$$

则称 $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 是一个具有线性生殖率的纯生过程。对于这样的纯生过程，其密度矩阵 Q 必然满足 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$。所以由定理 9·2 的系 1 得知其转移矩阵 $P(t)=\overline{P}(t)=(p_{i,j}(t), i,j\geqslant 0)$ 由 Q 所唯一决定。利用定理 9·2 系 2，方程组（9·40）即是

$$p_{i,j}(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } j<i\\ e^{-i\lambda t} & \text{当 } j=i\\ e^{-j\lambda t}\int_0^t e^{j\lambda s}(j-1)\lambda p_{i,j-1}(s)ds & (j>i)\end{cases}$$

（9·48）

注意：而令 $\lambda_0=0$，若令 D_q、S、$\Delta(t)$、$P_n(t)$、$\overline{P}(t)$ 如定理 9·2 之系 2 中所定义。则由 $\lambda_0=0$ 得知 $\Delta(t-u)S$ 中的第 0 行恒为 0，所以由 $P_n(t)$ 之定义知 $P_n(t)$ 的第 0 行恒为 0（当 $n\geqslant 1$），所以 $\overline{P}(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(t)$ 的第 0 行即为 $P_0(t)=\Delta(t)$ 的第 0 行，亦即

$$p_{0,j}(t)=\delta_{0,j}=\begin{cases}1 & 当\ j=0\\ 0 & 当\ j\neq 0\end{cases}$$

当 $i\geqslant 1$ 时，我们来解（9·48）的第三个方程式。即是解

$$p_{i,j}(t)=e^{-j\lambda t}\int_0^t e^{j\lambda s}(j-1)\lambda p_{i,j-1}(s)ds$$

$$(j>i\geqslant 1) \tag{9·49}$$

当 $j=i+1$ 时：由（9·48）第二式得

$$p_{i,i+1}(t)=e^{-(i+1)\lambda t}\int_0^t e^{(i+1)\lambda s}i\lambda p_{i,i}(s)ds$$

$$=e^{-(i+1)\lambda t}\int_0^t e^{(i+1)\lambda s}i\lambda e^{-i\lambda s}ds$$

$$=e^{-(i+1)\lambda t}i(e^{\lambda t}-1)$$

$$=C_1^i(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t}) \tag{9·50}$$

设

$$p_{i,i+k}(t)=C_k^{i+k-1}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^k \tag{9·51}$$

则由（9·49）有

$$p_{i,i+k+1}(t)$$

$$=e^{-(i+k+1)\lambda t}\int_0^t e^{(i+k+1)\lambda s}(i+k)\lambda p_{i,i+k}(s)ds$$

$$=e^{-(i+k+1)\lambda t}$$

$$\cdot\int_0^t e^{(i+k+1)\lambda s}(i+k)\lambda C_k^{i+k-1}(e^{-\lambda s})^i\cdot(1-e^{-\lambda s})^k ds$$

$$=e^{-(i+k+1)\lambda t}C_k^{i+k-1}$$

$$\cdot\int_0^t(i+k)\lambda e^{(k+1)\lambda s}(1-e^{-\lambda s})^k ds$$

$$=e^{-(i+k+1)\lambda t}C_k^{i+k-1}(i+k)$$

$$\cdot\int_0^{\lambda t}e^{(k+1)u}(1-e^{-u})^k du$$

$$=e^{-(i+k+1)\lambda t}C_k^{i+k-1}(i+k)\int_0^{\lambda t}e^u(e^u-1)^k du$$

$$=e^{-(i+k+1)\lambda t}C_k^{i+k-1}\frac{i+k}{1+k}\int_0^{\lambda t}d[(e^u-1)^{k+1}]$$

$$=e^{-(i+k+1)\lambda t}C_{k+1}^{i+k}(e^{\lambda t}-1)^{k+1}$$

$$=C_{k+1}^{i+k}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^{k+1} \qquad (9\cdot52)$$

归纳法完成。即是

$$p_{i,j}(t)=C_{j-i}^{j-1}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^{j-i} \quad (j>i\geqslant1) \qquad (9\cdot53)$$

总之我们得到

$$p_{i,j}(t)=\begin{cases}\delta_{0,j} & 当\ i=0\\ 0 & 当\ j<i\\ e^{-i\lambda t} & 当\ j=i\\ C_{j-i}^{j-1}(e^{-\lambda t})^i(1-e^{-\lambda t})^{j-i} & 当\ j>i\geqslant1\end{cases} \qquad (9\cdot54)$$

所以当 $m\geqslant 1$ 时，（下面的（9·55）式中用 $i=\sqrt{-1}$ 表虚根），$X_{s+t}-X_s$ 对 $X_s=m$ 的条件特征函数：

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}(e^{iu(X_{s+t}-X_s)}\mid X_s=m)\\
&=\sum_{n\geqslant m} e^{iu(n-m)}\, p(X_{s+t}=n\mid X_s=m)\\
&=\sum_{n\geqslant m} e^{iu(n-m)}\, C_{n-m}^{n-1}(e^{-\lambda t})^m(1-e^{-\lambda t})^{n-m}\\
&=(e^{-\lambda t})^m\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1} e^{ikn}(1-e^{-\lambda t})^k\\
&=(c^{-\lambda t})^m\sum_{k=0}^{\infty} C_k^{m+k-1}(e^{iu}(1-e^{-\lambda t}))^k\\
&=(e^{-\lambda t})^m\left\{\frac{1}{1-e^{iu}(1-e^{-\lambda t})}\right\}^m
\end{aligned}
\tag{9·55}
$$

所以

$$\mathbf{E}(X_{t+s}-X_s\mid X_s=m)=me^{\lambda t}(1-e^{-\lambda t}) \tag{9·56}$$

$$V_{ar}(X_{t+s}-X_s\mid X_s=m)=me^{2\lambda t}(1-e^{-\lambda t}) \tag{9·57}$$

（此处及今后，$V_{ar}(X_{t+s}-X_s\mid X_s=m)\equiv$
$\mathbf{E}((X_{t+s}-X_s)^2\mid X_s=m)-[\mathbf{E}((X_{t+s}-X_s)\mid X_s=m)]^2$）

特别地，若 $X_0\equiv m$，则

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}(X_t)=\mathbf{E}(X_t-X_0)+m\\
&=\mathbf{E}(X_t-X_0\mid X_0=m)+m\\
&=me^{\lambda t}(1-e^{-\lambda t})+m=me^{\lambda t}
\end{aligned}
\tag{9·58}
$$

$$
\begin{aligned}
&V_{ar}(X_t)=V_{ar}(X_t-X_0)\\
&=V_{ar}(X_t-X_0\mid X_0=m)\\
&=me^{2\lambda t}(1-e^{-\lambda t})
\end{aligned}
\tag{9·59}
$$

下面我们介绍一下生灭过程的平均遍历极限$\Pi=(\bar{\pi}_{i,j}$, $i,j\geqslant 0)$ 的求法。

定理 9·3。设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是一个生灭过程，其密度矩阵 $Q=(q_{i,j},\ i,j\geqslant 0)$ 由 (9·1) 式所给出，设 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$ 是其转移矩阵，$\bar{P}(t)=(\bar{p}_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$ 由定理 8·6 所定义。设Q已知，$P(t)$ 未知。（由Q已知可推出 $\bar{P}(t)$ 已知）令

$$\pi_{i,j}=\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t)\qquad (i,j\geqslant 0)$$

$$\bar{\pi}_{i,j}=\lim_{t\to\infty}\bar{p}_{i,j}(t)\qquad (i,j\geqslant 0)$$

（甲）设 $\lambda_0>0$

令 $\rho_0=1\quad \rho_n=\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\qquad (n\geqslant 1)$

（1）若 $\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n=\infty$ 则 $\bar{\pi}_{i,j}=0\qquad (i,j\geqslant 0)$

（2）若 $\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty$ $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n\rho_n}=\infty$ 则

$$\bar{\pi}_{i,j}=\frac{\rho_j}{\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n}\qquad (i\geqslant 0,j\geqslant 0)$$

（3）若 $\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n<\infty$ $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\lambda_n\rho_n}<\infty$ 则

$$\bar{\pi}_{i,j}=0\qquad (i\geqslant 0,\ j\geqslant 0)$$

（乙）设 $\lambda_0=0$

令

$$\gamma=1+\frac{\mu_1}{\lambda_1}+\frac{\mu_1\mu_2}{\lambda_1\lambda_2}+\cdots$$

$$y_n^{(0)}=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\mu_1\cdots\mu_k}{\lambda_1\cdots\lambda_k}\qquad(n\geqslant 1)\qquad y_0^{(0)}=1$$

（1）若 $\gamma=\infty$ 则

$$\bar{\pi}_{i,0}=1\qquad(i\geqslant 0)$$
$$\bar{\pi}_{i,j}=0\qquad(i\geqslant 0,\ j\geqslant 1)$$

（2）若 $\gamma<\infty$ 则

$$\bar{\pi}_{i,0}=y_i^{(0)}\qquad(i\geqslant 0)$$
$$\bar{\pi}_{i,j}=0\qquad(i\geqslant 0,\ j\geqslant 1)$$

注 若Q满足（9·22）式，由定理9·2系1得知 $P(t)=\bar{P}(t)$，从而

$$\pi_{i,j}=\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t)=\lim_{t\to\infty}\bar{p}_{i,j}(t)=\bar{\pi}_{i,j}\qquad(i,j\geqslant 0)$$

定理9·3告诉我们，从Q出发（不必经过中间对象$P(t)$），就可以直接算出

$$\pi_{i,j}=\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t)$$

在实际问题中，往往知道Q，而不知道 $P(t)$，但是又要计算$\pi_{i,j}$。定理9·3就回答我们如何从Q算$\pi_{i,j}$，而且算法很简单。

由于定理9·3的证明已超出本书的要求，所以我们不拟在此证明了。有兴趣的读者请参看文献[1]第二篇定理5·7和定理5·8。

习　　题

9·1. （纯灭过程）设 $\{X_t, t\in[0, \infty)\}$ 是一个以 $E=\{0,1,2,\cdots\}$ 为状态空间的马尔可夫过程，其密度矩阵 $Q=(q_{i,j},\ i,j\in E)$ 具有下述形式

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -\mu_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\mu_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

则称 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是纯灭过程。特别地，若 $\mu_n=n\mu$，$(\mu>0, n=1,2,\cdots)$，则称此纯灭过程为具有线性死亡率的纯灭过程。试对纯灭过程讨论类似于纯生过程的对应的问题。

9·2. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是一个具有线性生殖率的纯生过程，若 X_0 服从参数为 p 的几何分布，即是 $P(X_0=k)=p(1-p)^{k-1}$，$k=1,2,\cdots$，试求 $\mathbf{E}(X_t)$ 和 $V_{ar}(X_t)$。（提示：利用（9·56）和（9·57）。）

9·3. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是满足 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$ 的纯生过程，$P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$ 是其转移函数，

$$\Pi=\lim_{t\to\infty}P(t)。试证$$

（1）若 $\lambda_0=0$，则

$$\Pi=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

（2）若 $\lambda_0>0$，则 $\Pi=0$。

（提示：利用（9·40）。若 $\lambda_0=0$，则

$$\lim_{t\to\infty}p_{0,0}(t)=\lim_{t\to\infty}e^{-\lambda_0 t}=1,$$

$$\lim_{t\to\infty}p_{i,i}(t)=\lim_{t\to\infty}e^{-\lambda_i t}=0 \qquad (i\geqslant 1),$$

$$\lim_{t\to\infty}p_{0,j}(t)=0, \qquad (j\geqslant 1)\text{。又}$$

$$\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t)=0 \qquad (j<i)$$

当 $j>i\geqslant 1$ 时，利用（9·40）第三式得

$$p_{i,i+1}(t)=e^{-\lambda_{i+1}t}\int_0^t e^{\lambda_{i+1}s}\lambda_i e^{-\lambda_i s}ds$$

所以

$$\lim_{t\to\infty}p_{i,i+1}(t)=0 \qquad (i\geqslant 1)$$

对 j 作归纳法。设

$$\lim_{t\to\infty}p_{i,j-1}(t)=0 \qquad (j-1>i\geqslant 1)$$

往证

$$\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t)=0 \qquad (j>j-1>i\geqslant 1)$$

对任意 $\varepsilon>0$，取 T 使

$$p_{i,j-1}(s)<\varepsilon \qquad (s\geqslant T)$$

则再用（9·40）第三式有

$$\begin{aligned}p_{i,j}(t)&=e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{\lambda_j s}\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(s)ds\\&\leqslant e^{-\lambda_j t}\int_0^T e^{\lambda_j s}\lambda_{j-1}ds\\&\quad+e^{-\lambda_j t}\int_T^t e^{\lambda_j s}\lambda_{j-1}\varepsilon ds\end{aligned}$$

在上式中令 $t\to\infty$ 得（注意当 $j-1>i\geqslant 1$ 时 $\lambda_{j-1}\lambda_j>0$）

$$\limsup_{t\to\infty}\ p_{i,j}(t)$$

$$\leqslant \lambda_{j-1}\varepsilon \limsup_{t\to\infty}\int_T^t e^{-\lambda_j(t-s)}ds$$

$$\leqslant \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\varepsilon \qquad (j>j-1>i\geqslant 1)$$

由 $\varepsilon>0$ 且可以任意小得

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)=0 \qquad (j>j-1>i\geqslant 1)$$

归纳法完成。总之

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)=0 \qquad (\text{当 } j>i\geqslant 1 \text{ 时})$$

（1）得证。（2）的证明可仿（1）

9·4. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个具有线性生殖率与线性死亡率的生灭过程，即是其密度矩阵 Q 具有（9·1）形式且满足

$$\lambda_n=n\lambda \qquad (n=0,1,2,\cdots,\ \lambda>0)$$

$$\mu_n=n\mu \qquad (n=1,2,\cdots,\ \mu>0)$$

再设 $P(t)=(p_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$ 是其转移函数，$\overline{P}(t)=(\overline{p}_{i,j}(t),\ i,j\geqslant 0)$ 如定理8·6所定义，$\mu\geqslant\lambda$

（1）试证 $P(t)=\overline{P}(t)$

（2）求出 $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$

9·5. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是例9·1中所定义的生灭过程，即其密度矩阵 $Q=(q_{i,j},\ i,j\geqslant 0)$ 如（9·4）式。即是 $\lambda_n\equiv\lambda>0$，$(n\geqslant 0)$，$\mu_n=n\mu$，$(n\geqslant 1,\ \mu>0)$，（这种生灭过程称为常生殖率和线性死亡率的生灭过程）设 $P(t)$ 与 $\overline{P}(t)$ 之意义如前。

（1）试证 $P(t)=\overline{P}(t)$

（2）求出 $\lim\limits_{t\to\infty} P(t)$

§10 排队过程

在这一节中，我们将要把前几节中得到的有关泊松过程、更新过程、生灭过程以及一般的马尔可夫过程的结果，应用到排队论（也有人称作随机服务系统）中来。一般认为，爱尔兰（Erlang）、欣钦（ХинЧин）等人作过奠基性的工作。

排队论主要研究各类排队现象以便合理解决“顾客”与“服务机构”的供求矛盾，这里顾客与服务机构都是抽象的，视具体问题的不同而有不同的含义。例如人们到售票站去购票，“人”就是顾客，“售票窗口”就是服务机构；再如飞机要求在机场降落，“飞机”就是顾客，而“跑道”就是服务机构；又如人们打电话，“电话呼叫”就是顾客，而“电话交换台”就是服务机构。尽管顾客、服务机构、排队现象形形色色，但从理论上来概括，要构成一个完整的“服务系统”，都必须具备下列三个组成部分：

（1）输入过程。即是来到服务机构请求为之服务的顾客到来的规律。

（2）服务规则。即是指各种类型的“顾客”来到服务机构时，按什么原则什么次序接受服务。

（3）服务机构。即是指服务机构内部的设备、能力、服务速度等等。

下面我们逐个来简单介绍一下这三个组成部分。

（1）输入过程。

一般而言，有下列几种输入。令 X_t 是 $[0, t)$ 内来到服务机构请求服务的顾客数，τ_n 是第 n 个顾客到来的时刻，$\tau_1=T_1,\cdots,\tau_n=\sum_{k=1}^{n}T_k$，$(n\geqslant1)$。

（A）定长输入。即是存在一个常数 α，使 $P(T_n=\alpha)=1$，$(n\geqslant1)$，即相邻到来的两个顾客的间隔恒为 α，亦即

$$A(t)\equiv P(T_n<t)=\begin{cases}0 & t\leqslant\alpha\\ 1 & t>\alpha\end{cases}\qquad(10\cdot1)$$

（B）泊松输入。即是 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个泊松过程（强度为 λ）。可以证明（参见定理10·1）：$\{X_t\}$ 是强度为 λ 的泊松过程的充要条件是 $\{X_t\}$ 是一个更新过程，其更新间距 $\{T_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一串相互独立具有共同的负指数分布

$$P(T_n<t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\leqslant0\end{cases}\qquad(10\cdot2)$$

（C）爱尔兰输入。即是 $\{T_n,\ n=0,\ 1,\ \cdots\}$ 是一串相互独立具有公共分布函数的随机变量，其密度函数为

$$a(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant0\\ \dfrac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\quad e^{-t\lambda} & t>0\end{cases}\qquad(10\cdot3)$$

（$\lambda>0$，k 是一个正整数）亦即 T_n 服从参数为（k，λ）的 Γ 分布。

注意：当 $k=1$ 时，爱尔兰输入即为泊松输入，所以爱尔兰输入为泊松输入之推广。

（D）一般输入。即是 $\{T_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一串相互独立相同分布的随机变量。

（A）、（B）、（C）都是（D）的特例。

（2） 服务规则。

一般而言，有三大类。

（A） 损失制。即是顾客到达时，如果服务机构内的所有服务设施都被占，该顾客就自动离去，不再排队等候。例如我国通用的电话系统就是采取损失制的服务规则。一次电话呼叫（来到一个顾客），当所有的电话线被占用时，只此呼叫就消失。

（B） 等待制。顾客到达时，若服务机构内的所有服务设施都被占，此顾客就加入等待服务的排队行列。这种服务规则中，如果细分，还有先到先服务，优先权服务，随机服务等等方式。

（C） 混合制。即兼有消失制与等待制两种含义。例如规定：等待服务的顾客不超过N（确定的一个正整数）时，新来的顾客就加入排队行列，若队长超过N，新来的顾客就离去。再如：顾客在队伍中等待时间不超过T，超过T就离去。

（3）服务机构。主要是指服务设施的数目（例如机场有N条跑道，电话交换台有M条线路，某火车站有k个售票窗口，等等。）及每一个服务设施的服务速度。关于每一个服务设施的服务速度，大致上又有下列几种：（令V是每个顾客的服务时间）

（A）定长分布。即是 $P(V=\beta)=1$，亦即

$$B(t)\equiv P(V<t)=\begin{cases} 0 & t\leqslant\beta \\ 1 & t>\beta \end{cases} \qquad (10\cdot4)$$

（B） 负指数分布。即各顾客的服务时间相互独立具有相同的负指数分布：

$$B(t)\equiv P(V<t)=\begin{cases}1-e^{-\mu t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}\qquad(10\cdot5)$$

其中 μ 是一正数。平均服务时间为

$$\mathrm{E}(V)=\int_0^{\infty} x\mu e^{-\mu x}\ dx=\frac{1}{\mu}\qquad(10\cdot6)$$

（C） 爱尔兰分布。即各顾客的服务时间相互独立具有相同的爱尔兰分布，其密度函数为

$$b(t)=\begin{cases}\dfrac{k\mu(k\mu t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu k t} & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases}\qquad(10\cdot7)$$

其中 $\mu>0$， k 为正整数。

（D） 一般分布。即各顾客的服务时间相互独立具有相同的分布函数。

在服务系统中，几种重要的数量指标为：

（1）等待时间。即是从顾客到达服务机构至他开始被服务这段时间。从顾客的立场出发，当然等待时间愈短愈好。但是等待时间愈短，势必要求服务机构的服务设施多，速度快。如何调整这一矛盾，以使顾客与服务机构双方都满意，这正是排队论要解决的矛盾之一。

（2） 队长。即是在等待服务的顾客数。这也是顾客与服务机构双方都关心的问题。就服务机构而言，正确估计出队长，对设计等待空间（如候机室、停车场、仓库、码头…等等）的大小，服务效率的快慢，都有很大关系。等待空间

设计过大，则造成闲置浪费，等待空间过小，则容纳不了等待服务的顾客。服务效率太低，服务系统前经常出现长队，则引起顾客厌烦而离去，或下次不再来。服务效率太高，势必增加服务设施（当然，加强科学管理，在不增加设施的情况下，也可以提高服务效率，但我们在这里假设科学管理已达到较理想的程度，而从数学的角度去研究服务设施的数量与服务效率高低的关系。）就顾客而言，当然希望队伍不太长为好，这样等候服务的时间会少一些。

（3） 忙期。即服务机构连续繁忙的时间。这直接关系到服务机构中的服务人员，服务设施的工作强度。也涉及到顾客的利益，例如呼叫一次电话，总希望不至发生所有可使用的线路处于忙期。因为所有可使用的线路都处于忙期，电话就打不通了。

下面我们首先研究输入过程。

定理 10·1. 输入过程 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty\}$ 是强度为 λ 的泊松过程的充要条件是：

$\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是更新过程，其更新间距 $\{T_n,\ n=1,\ 2,\cdots\}$ 是相互独立服从共同分布的随机变量序列，且其公共分布为以 λ 为参数的负指数分布

$$P(T_n<t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases}\qquad(10\cdot 8)$$

证。必要性。设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个强度为 λ 的泊松输入过程，τ_n 是第 n 个顾客到达的时刻，$T_n=\tau_n-\tau_{n-1}$，$(n\geqslant 1,\ \ \tau_0\equiv 0)$， $\{X_t=n\}=\{\tau_n<t\leqslant\tau_{n+1}\}$，$\{X_t\geqslant n\}=\{\tau_n<t\}$ $(t\in[0,\ \infty),\ n=0,\ 1,\ 2\cdots)$。记 $X_t=X(t)$。往证 $T_1,\ T_2,\ \cdots,T_k$ 相互独立，且每个

T_i 具有形如（10·8）的负指数分布。为符号简单计，只证 $k=2$ 的场合。

任取正实数 $t_1>0$，$t_2>0$。把 $[0,\ t_1)$ n 等分，令

$$A_n=\bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)-X\left(\frac{j}{n}t_1\right)\leqslant 1\right\}$$

$$B_n=\bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)-X\left(\frac{j}{n}t_1\right)>1\right\}$$

则 A_n 与 B_n 互为补事件，且

$$A_n\cap\{X(t_1)\geqslant 1\}\subset\bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=0,\ X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)=1\right\}$$

所以由 $\left\{X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)=1\right\}\subset\left\{T_1<\frac{j+1}{n}t_1\right\}$

$$=\left\{\tau_1<\frac{j+1}{n}t_1\right\}$$ 得

$$A_n\cap\{X(t_1)\geqslant 1\}\cap\{T_2<t_2\}$$

$$\subset\bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=0,\quad X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)=1,\ T_2<t_2\right\}$$

$$\subset\bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=0,\ X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)=1,\tau_1<\frac{j+1}{n}t_1,\ T_2<t_2\right\}$$

$$\subset \bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=0,\ X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)=1,\right.$$

$$\left.\tau_2=\tau_1+T_2<\frac{j+1}{n}t_1+t_2\right\}$$

$$=\bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=0,\ X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)=1,\right.$$

$$\left.X\left(\frac{j+1}{n}t_1+t_2\right)\geqslant 2\right\}$$

$$=\bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=0,\ X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)=1,\right.$$

$$\left.X\left(\frac{j+1}{n}t_1+t_2\right)-X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)\geqslant 1\right\}$$

$$=\bigcup_{j=0}^{n-1}\left\{X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=0, X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)-X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=1,\right.$$

$$\left.X\left(\frac{j+1}{n}t_1+t_2\right)-X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)\geqslant 1\right\} \qquad (10\cdot 9)$$

故由 $\{X(t),\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是以 λ 为强度的泊松过程得

$$P(T_1<t_1,\ T_2<t_2)=P(X(t_1)\geqslant 1,\ T_2<t_2)$$

$$\leqslant P(A_n,\ X(t_1)\geqslant 1, T_2<t_2)+P(B_n)$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{n-1} P\left(X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=0,\ X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)-X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=1,\right.$$

$$\left.X\left(\frac{j+1}{n}t_1+t_2\right)-X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)\geqslant 1\right)+P(B_n)$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda j t_1/n}\cdot\frac{\lambda t_1}{n}e^{-\lambda t_1/n}\quad(1-e^{-\lambda t_2})$$

$$+P(B_n)$$

$$=\frac{1-e^{-\lambda t_1}}{1-e^{-\frac{\lambda t_1}{n}}}\cdot e^{-\frac{\lambda t_1}{n}}\frac{\lambda t_1}{n}(1-e^{-\lambda t_2})+P(B_n)$$

$$=(1-e^{-\lambda t_1})(1-e^{-\lambda t_2})\frac{[1+0(1)]\frac{\lambda t_1}{n}}{\frac{\lambda t_1}{n}+0\left(\frac{1}{n}\right)}+n\cdot 0\left(\frac{t_1}{n}\right)$$

$$=(1-e^{-\lambda t_1})(1-e^{-\lambda t_2})\frac{1+0(1)}{1+0(1)}+0(1)$$

$(n\to\infty)$。 (10·10)

在（10·10）中令 $n\to\infty$ 即得

$P(T_1<t_1,\ T_2<t_2)\leqslant(1-e^{-\lambda t_1})(1-e^{-\lambda t_2})$ （10·11）

下面证明与（10·11）相反的不等式。仿（10·10）有

$P(T_1<t_1,\ T_2<t_2)$

$$\geqslant\sum_{j=0}^{n-1}P\left(X\left(\frac{j}{n}t_1\right)=0,\quad X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)=1,\right.$$

$$\left.X\left(\frac{j}{n}t_1+t_2\right)-X\left(\frac{j+1}{n}t_1\right)\geqslant 1\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1} e^{-\frac{\lambda j t_1}{n}}\frac{\lambda t_1}{n}e^{-\frac{\lambda t_1}{n}}\left(1-e^{-\lambda\left(t_2-\frac{t_1}{n}\right)}\right)$$

在上式中令 $n\to\infty$ 得

$$P(T_1<t_1, T_2<t_2)$$
$$\geqslant(1-e^{-\lambda t_1})(1-e^{-\lambda t_2}) \tag{10·12}$$

由 (10·11). (10·12) 得

$$P(T_1<t_1, T_2<t_2)$$
$$=(1-e^{-\lambda t_1})(1-e^{-\lambda t_2}) \quad (t_1>0, \ t_2>0) \tag{10·13}$$

在 (10·13) 中令 $t_1 \uparrow \infty$得

$$P(T_2<t_2)=(1-e^{-\lambda t_2}) \quad (t_2>0) \tag{10·14}$$

在 (10.13) 中令 $t_2 \uparrow \infty$得

$$P(T_1<t_1)=(1-e^{-\lambda t_1}) \quad (t_1>0) \tag{10.15}$$

由 (10·13)、(10·14)、(10·15) 得

$$P(T_1<t_1, T_2<t_2)=P(T_1<t_1)P(T_2<t_2)$$
$$(t_1>0, \ t_2>0) \tag{10·16}$$

而当 t_1 和 t_2 中有一个$\leqslant 0$, 则 (10·16) 显然成立，当 $t\leqslant 0$ 时，又有

$$P(T_n<t)=0$$

总之 T_1 与 T_2 相互独立，且

$$P(T_n<t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases}$$

故必要性得证。

充分性。设 $\{T_n, n=1, 2, \cdots\}$ 相互独立，且

$$P(T_n<t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases} \tag{10·17}$$

则 $\tau_n=\sum_{i=1}^{n} T_i$ 服从参数为 (n, λ) 的 Γ 分布，即是τ_n的密度函数为

$$a_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t} & t>0\\ 0 & t\leqslant 0\end{cases} \tag{10·18}$$

往证 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是强度为 λ 的泊松过程。为此，只须证明对任何正整数 n，任何非负实数 $0=t_0<t_1<\cdots<t_n$，及非负整数 $i_1,\ \cdots,\ i_n$，有下述恒等式

$$P(X_{t_1}-X_{t_0}=i_1,\ X_{t_2}-X_{t_1}=i_2,\ \cdots,\ X_{t_n}-X_{t_{n-1}}=i_n)$$

$$=\prod_{v=1}^{n} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})}\cdot\frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!} \tag{10·19}$$

事实上，若把 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_{v-1},\ i_{v+1},\ \cdots,\ i_n$ 均由0到∞求和即得

$$P(X_{t_v}-X_{t_{v-1}}=i_v)$$

$$=e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})}\cdot\frac{[\lambda(t_v-t_{v-1}]^{i_v}}{i_v!} \tag{10·20}$$

此即 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 具有平稳增量。而按 (10·20) 直接计算得

$$\sum_{i_v=2}^{\infty}P(X_{t_v}-X_{t_{v-1}}=i_v)=0(t_v-t_{v-1}) \tag{10·21}$$

(当 $t_v-t_{v-1}\to 0$)

$$\sum_{i_v=0}^{\infty}P(X_{t_v}-X_{t_{v-1}}=i_v)=1 \tag{10·22}$$

此即 $\{X_t,t\in[0,\infty)\}$ 具有单跳跃性及随机性。而把

(10·20) 代入 (10·19) 即发现 $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 具有独立增量。而零初值性 $X_0\equiv 0$ 乃属显然。总之，$\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 是一个泊松过程。下面我们对 n 作归纳法来证明 (10·19)

(甲) 当 $n=1$ 时。

(1) 若 $i_1=0$，则

$$P(X_{t_1}-X_{t_0}=0)=P(X_{t_1}=0)$$
$$=P(T_1\geqslant t_1)=e^{-\lambda t_1} \tag{10·23}$$

此即 $n=1$，$i_1=0$ 时，(10·19) 成立。

(2) 若 $i_1>0$，则由 (10·18) 得

$$P(X_{t_1}-X_{t_0}=i_1)=P(X_{t_1}=i_1)$$
$$=P(\tau_{i_1}<t_1\leqslant\tau_{i_1+1})$$

$$\overset{(10\cdot18)}{=\!=}\int_0^{t_1}P(\tau_{i_1+1}\geqslant t_1\mid\tau_{i_1}=s)a_{i_1}\cdot(s)ds$$

$$=\int_0^{t_1}P(\tau_{i_1}+T_{i_1+1}\geqslant t_1\mid\tau_{i_1}=s)a_{i_1}\cdot(s)ds$$

$$=\int_0^{t_1}P(T_{i_1+1}\geqslant t_1-s)a_{i_1}\cdot(s)ds$$

$$=\int_0^{t_1}e^{-\lambda(t_1-s)}\frac{\lambda(\lambda s)^{i_1-1}}{(i_1-1)!}e^{-\lambda s}\,ds$$

$$=e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^{i_1}}{i_1!} \tag{10·24}$$

此即 $n=1$，$i_1>0$ 时，(10·19) 成立。总之 $n=1$ 时，(10·19) 成立。

（乙）假设 $n\leqslant m-1$ 时 (10·19) 成立，往证 $n=m$ 时 (10·19) 亦成立。

(1) 设 $i_2>0$，$i_1>0$。用 (10·18)、(10·17) 及归纳法假设得

$$P\Big(\bigcap_{v=1}^{m}\{X_{t_v}-X_{t_{v-1}}=i_v\}\Big)$$

$$=P\Big(\bigcap_{v=1}^{m}\{X_{t_v}=i_1+\cdots+i_v\}\Big)$$

$$P=\Big(\bigcap_{v=1}^{m}\{\tau_{i_1+\cdots+i_v}<t_v\leqslant\tau_{i_1+\cdots+i_v+1}\}\Big)$$

$$\overset{(10.18)}{=\!=\!=}\int_0^{t_1}P\Big(\{\tau_{i_1+1}\geqslant t_1\}\bigcap_{v=2}^{m}\{\tau_{i_1+\cdots+i_v}<t_v\leqslant\tau_{i_1+\cdots+i_v+1}\}$$

$$\mid\tau_{i_1}=s\Big)a_{i_1}(s)ds$$

$$=\int_0^{t_1}P\Big(\{T_{i_1+1}\geqslant t_1-s\}\bigcap_{v=2}^{m}\Big\{\sum_{k=i_1+1}^{i_1+\cdots+i_v}T_k<t_v-s$$

$$\leqslant\sum_{k=i_1+1}^{i_1+\cdots+i_v+1}T_k\Big\}\Big)a_{i_1}(s)ds$$

$$\overset{(10\cdot17)}{=\!=\!=}\int_0^{t_1}ds\int_{t_1-s}^{t_2-s}du\Big(P\Big(\bigcap_{v=2}^{m}\Big\{\sum_{k=i_1+2}^{i_1+\cdots+i_v}T_k<t_v-s-u$$

$$\leqslant \sum_{k=i_1+2}^{i_1+\cdots+i_v+1} T_k \Bigg\} \Bigg| T_{i_1+1}=u \Bigg) \lambda e^{-\lambda u} a_{i_1}(s) \Bigg]$$

$$=\int_0^{t_1} ds \int_{t_1-s}^{t_2-s} du \Bigg[P\Bigg(\bigcap_{v=2}^{m} \Bigg\{ \sum_{k=i_1+2}^{i_1+\cdots+i_v} T_k < t_v - s - u$$

$$\leqslant \sum_{k=i_1+2}^{i_1+\cdots+i_v+1} T_k \Bigg\} \Bigg) \lambda e^{-\lambda u} a_{i_1}(s) \Bigg]$$

$$=\int_0^{t_1} ds \int_{t_1-s}^{t_2-s} du \Bigg[P\Bigg(\bigcap_{v=2}^{m} \Bigg\{ \sum_{k=1}^{i_2+\cdots+i_v-1} T_k < t_v - s - u$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{i_2+\cdots+i_v} T_k \Bigg\} \Bigg) \lambda e^{-\lambda u} a_{i_1}(s) \Bigg]$$

$$=\int_0^{t_1} ds \int_{t_1-s}^{t_2-s} du \Bigg[P\Bigg(\bigcap_{v=2}^{m} \Big\{ \tau_{i_2+\cdots+i_v-1} < t_v - s - u$$

$$\leqslant \tau_{i_2+\cdots+i_v} \Big\} \Bigg) \lambda e^{-\lambda u} a_{i_1}(s) \Bigg]$$

$$=\int_0^{t_1} ds \int_{t_1-s}^{t_2-s} du \Bigg[P\Bigg(\bigcap_{v=2}^{m} \Big\{ X_{t_v-s-u} = i_2+\cdots+i_v-1 \Big\} \Bigg)$$

$$\cdot \lambda e^{-\lambda u} a_{i_1}(s) \Bigg]$$

$$=\int_0^{t_1} ds \int_{t_1-s}^{t_2-s} du \Bigg[P\Bigg(\Big\{ X_{t_2-s-u} = i_2 - 1 \Big\}$$

$$\cdot \bigcap_{v=3}^{m} \Big\{ (X_{t_v-s-u} - X_{t_{v-1}-s-u}) = i_v \Big\} \Bigg)$$

$$\cdot \lambda e^{-\lambda u} a_{i_1}(s) \Bigg]$$

$$=\int_0^{t_1} ds\int_{t_1-s}^{t_2-s} du\Big[e^{-\lambda(t_2-s-u)}\frac{[\lambda(t_2-s-u)]^{i_2-1}}{(i_2-1)!}$$

$$\cdot\prod_{v=3}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})}\frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}$$

$$\cdot\lambda e^{-\lambda u}\cdot\frac{\lambda(\lambda s)^{i_1-1}}{(i_1-1)!}e^{-\lambda s}\Big]$$

$$=\int_0^{t_1} ds\Big[e^{-\lambda t_1}\frac{\lambda(\lambda s)^{i_1-1}}{(i_1-1)!}\prod_{v=2}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})}$$

$$\cdot\frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}\Big]$$

$$=\prod_{v=1}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})}\frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}\qquad(10\cdot25)$$

（2） 设 $i_2>0$， $i_1=0$ 由 $\tau_0\equiv0<t_1$ 有

$$P\Big(\bigcap_{v=1}^{m}\{X_{t_v}-X_{t_{v-1}}=i_v\}\Big)$$

$$=P\Big(\bigcap_{v=1}^{m}\{X_{t_v}=i_1+\cdots+i_v\}\Big)$$

$$=P\Big(\bigcap_{v=1}^{m}\{\tau_{i_1+\cdots+i_v}<t_v\leqslant\tau_{i_1+\cdots+i_v+1}\}\Big)$$

$$=P\Big(\{\tau_{i_1+1}\geqslant t_1\}\bigcap_{v=2}^{m}\{\tau_{i_1+\cdots+i_v}<t_v\leqslant\tau_{i_1+\cdots+i_v+1}\}\Big)$$

仿（10·25）可证

$$P\Big(\bigcap_{v=1}^{m}\{X_{t_v}-X_{t_{v-1}}=i_v\}\Big)$$

$$=\prod_{v=1}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})}\ \frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!} \qquad (10\cdot 26)$$

（3）若 $i_2=0$，则当 i_1，i_3 中有一为0时，$n=m$ 的情形就化为了 $n=m-1$ 时的情形。例如当 $i_1=0$ 时，有

$$P\left(\left\{X_{t_1}-X_{t_0}=0\right\}\cap\left\{X_{t_2}-X_{t_1}=0\right\}\cap\bigcap_{v=3}^{m}\left\{X_{t_v}-X_{t_{v-1}}=i_v\right\}\right)$$

$$=P\left(\left\{X_{t_2}-X_{t_0}=0\right\}\cap\bigcap_{v=3}^{m}\left\{X_{t_v}-X_{t_{v-1}}=i_v\right\}\right)$$

$$=e^{-\lambda(t_2-t_0)}\prod_{v=3}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})}\ \frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{v!}$$

$$=\prod_{v=1}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})}\ \frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}$$

故只需讨论 $i_2=0$，$i_1>0$，$i_3>0$ 的情形。这时我们有（注意 $t_0=0$，$X_{t_0}\equiv 0$ 及 $\{X_t=n\}=\{\tau_n<t\leqslant\tau_{n+1}\}$）

$$P(X_{t_1}-X_{t_0}=i_1,\ X_{t_2}-X_{t_1}=0,\ X_{t_3}-X_{t_2}=i_3,\ \cdots,\ X_{t_m}-X_{t_{m-1}}=i_m)$$

$$=P(X_{t_1}=i_1,\ X_{t_2}=i_1,\ X_{t_3}=i_1+i_3,\ \cdots,\ X_{t_m}=i_1+i_3+\cdots+i_m)$$

$$=P(\tau_{i_1}<t_1\leqslant\tau_{i_1+1},\ \tau_{i_1}<t_2\leqslant\tau_{i_1+1},\ \tau_{i_1+i_3}<t_3\leqslant\tau_{i_1+i_3+1},\ \cdots,\ \tau_{i_1+i_3+\cdots+i_m}<t_m\leqslant\tau_{i_1+i_3+\cdots+i_m+1})$$

$$=P(\tau_{i_1}<t_1,\ \tau_{i_1+1}\geqslant t_2,\ \tau_{i_1+i_3}<t_3\leqslant\tau_{i_1+i_3+1},\cdots,\ \tau_{i_1+i_3+\cdots+i_m}<t_m\leqslant\tau_{i_1+i_3+\cdots+i_m+1})$$

$$=\int_0^{t_1} P(\tau_{i_1+1}\geqslant t_2,\ \tau_{i_1+i_3}<t_3\leqslant\tau_{i_1+i_3+1},\ \cdots,$$

$$\tau_{i_1+i_3+\cdots+i_m}<t_m\leqslant\tau_{i_1+i_3+\cdots+i_m+1}\mid\tau_{i_1}=s)\cdot a_{i_1}(s)ds$$

$$=\int_0^{t_1} P\Big(T_{i_1+1}\geqslant t_2-s,(T_{i_1+1}+\cdots+T_{i_1+i_3})<t_3-$$

$$s\leqslant(T_{i_1+1}+\cdots+T_{i_1+i_3+1})\cdots,\ (T_{i_1+1}+\cdots+$$

$$T_{i_1+i_3+\cdots+i_m})<t_m-s\leqslant(T_{i_1+1}+\cdots+$$

$$T_{i_1+i_3+\cdots+i_m+1})\Big)\cdot a_{i_1}(s)ds$$

$$=\int_0^{t_1}\Big[\int_{t_2-s}^{t_3-s} P\Big(\ (T_{i_1+2}+\cdots+T_{i_1+i_3})\ <t_3-s-u<$$

$$(T_{i_1+2}+\cdots+T_{i_1+i_3+1}),\ \cdots,\ (T_{i_1+2}+\cdots+$$

$$T_{i_1+i_3+\cdots+i_m})<t_m-s-u\leqslant(T_{i_1+2}+\cdots\cdots+$$

$$T_{i_1+i_3+\cdots+i_m+1})\mid T_{i_1+1}=u\Big)\lambda e^{-\lambda u}du\ \Big]a_{i_1}(s)ds$$

$$=\int_0^{t_1}\Big[\int_{t_2-s}^{t_3-s} P(\tau_{i_3-1}<t_3-s-u\leqslant\tau_{i_3},\ \cdots,$$

$$\tau_{i_3+\cdots+i_m-1}<t_m-s-u\leqslant\tau_{i_3+\cdots+i_m})\lambda e^{-\lambda u}du\Big]$$

$$\cdot a_{i_1}(s)ds$$

$$=\int_0^{t_1}\Big[\int_{t_2-s}^{t_3-s} P(X_{t_3-s-u}=i_3-1,\ \cdots,\ X_{t_m-s-u}$$

$$=i_3+\cdots+i_m-1)\cdot\lambda e^{-\lambda u}du\ \Big]\cdot a_{i_1}(s)ds$$

$$=\int_0^{t_1}\Big[\int_{t_2-s}^{t_3-s} e^{-\lambda(t_3-s-u)}\ \frac{[\lambda(t_3-s-u)]^{i_3-1}}{(i_3-1)!}$$

$$\cdot\Big(\prod_{v=4}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})}\frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}\Big)\lambda e^{-\lambda u}du\ \Big]$$

$$\cdot\ a_{i_1}(s)ds$$

$$
=\prod_{v=4}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})} \frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}
$$

$$
\cdot\int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_3-s)} \frac{[\lambda(t_3-t_2)]^{i_3}}{i_3!} a_{i_1}(s)ds
$$

$$
=\prod_{v=4}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})} \frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}
$$

$$
\cdot\int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_3-s)} \frac{[\lambda(t_3-t_2)]^{i_3}}{i_3!} \quad \frac{\lambda(\lambda s)^{i_1-1}}{(i_1-1)!} e^{-\lambda s} ds
$$

$$
=\prod_{v=4}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})} \frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}
$$

$$
\cdot\frac{[\lambda(t_3-t_2)]^{i_3}}{i_3!} \cdot e^{-\lambda t_3}
$$

$$
\cdot\int_0^{t_1} \frac{\lambda(\lambda s)^{i_1-1}}{(i_1-1)!} ds
$$

$$
=\prod_{v=4}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})} \cdot \frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}
$$

$$
\cdot e^{-\lambda t_3} \frac{[\lambda(t_3-t_2)]^{i_3}}{i_3!} \cdot \frac{(\lambda t_1)^{i_1}}{i_1!}
$$

$$
=\prod_{v=1}^{m} e^{-\lambda(t_v-t_{v-1})} \cdot \frac{[\lambda(t_v-t_{v-1})]^{i_v}}{i_v!}
$$

（因为 $i_2=0$，$e^{-\lambda t_3}=e^{-\lambda(t_3-t_2)}\cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdot e^{-\lambda(t_1-t_0)}$）归纳法完成。定理证毕。

现在我们来综合研究服务系统。如前所述，一个完整的服务系统包含三个组成部分：（1）输入过程；（2）服务

规则；（3）服务机构。而服务规则一般而言有三大类——损失制、等待制和混合制。这三大类中，又可细分为先到先服务、优先服务，随机次序服务等。但是，在本书中，只是简单介绍排队论，如不特别声明，“服务规则”都是等待制或损失制，且先到先服务。因此，在服务系统中，主要剩下二个变动因素，即输入过程和服务机构。对于输入过程，我们用M、D、E_k、GI 分别表泊松输入、定长输入、参数为（k、λ）的爱尔兰输入、一般输入。对于服务机构，主要有两个指标，一是服务设施的数量，二是每一台服务设施的服务速度。服务设施的数量用n（有限个）或∞（无穷多个）表示，服务速度用G表示顾客的服务时间是一串相互独立具有公共分布的随机变量，用M表示顾客的服务时间是一串相互独立且具有公共的负指数分布的随机变量，D表示顾客的服务时间恒为定长，E_k表示顾客的服务时间是一串相互独立的具有公共的爱尔兰分布（Γ分布）的随机变量。而且我们总设顾客的服务时间与输入过程相互独立。这样一约定，对于一个服务系统，只要用四个指标就可以刻划了。例如：$M/M/n$（等待）表示泊松输入，服务规则是等待制先到先服务，服务机构中服务设施数目为n，每台设施的服务速度（即每个顾客所需之服务时间）服从负指数分布。$GI/M/n$（损失）表示一般输入，且服务规则是损失制先到先服务，服务机构中服务设施数目为n，每台设施的服务速度服从负指数分布。

（一） $M/M/n$（等待）系统。

在这一段中，恒设

（1） 输入过程是以λ为强度的泊松过程；

（2） 服务规则是等待制先到先服务，即是顾客到达

时，若有服务设施空闲，则该顾客立即被接受服务；若所有的（n台）服务设施均被占用，则该顾客加入等待队伍，依次等待接受服务；

（3） 服务机构中服务设施的数目为n，每个顾客的服务时间服从参数为μ的负指数分布，从而每个顾客的平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。

（4） 各顾客的服务时间是相互独立的，且与输入过程也是相互独立的。

令η_t表示时刻t在该服务机构中正在服务的顾客数与等待服务的顾客数的总和。则仿例9.1可证：$\{\eta_t, t\in[0,\infty)\}$是一个生灭过程，其密度矩阵$Q=(q_{i,j}, i,j\geqslant 0)$有如下形式：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{cases} \lambda_j\equiv\lambda & j=0, 1, 2, \cdots \\ \mu_j=\begin{cases} j\mu & j=1, 2, \cdots n \\ n\mu & j=n+1, n+2, \cdots \end{cases} \end{cases} \tag{10·27}$$

令 $P(t)=(p_{ij}(t),i,j\geqslant 0)$ 是 $\{\eta_t, t\in[0,\infty)\}$ 的转移矩阵，$\overline{P}(t)=(\overline{p}_{i,j}(t), i,j\geqslant 0)$ 由定理8·6所定义。

定理10·2. 对于 $M/M/n$ （等待） 系统而言，若$\frac{\lambda}{n\mu}<1$，则$\{\eta_t, t\in[0,\infty)\}$的转移矩阵 $P(t)=\overline{P}(t)$，且

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)=\frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k} \quad (i\geqslant 0,\ j\geqslant 0) \tag{10·28}$$

其中 $\rho_0=1 \quad \rho_k=\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} \quad (k\geqslant 1)$ (10·29)

λ_j,μ_j 如 (10·27) 所定义。

证。由于$\dfrac{\lambda}{n\mu}<1$，所以

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_m}{\lambda_k\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots\lambda_m}$$

$$\geqslant\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\mu_{k+1}\mu_{k+2}\cdots\mu_m}{\lambda_k\lambda_{k+1}\lambda_{k+2}\cdots\lambda_m}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{m=n+1}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{n\mu}{\lambda}\right)^{m-k}=\infty$$

因此由定理 9·1 系 1 知 $P(t)=\overline{P}(t)$。

又因为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k=\sum_{k=0}^{n}\rho_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}<\infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k\rho_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}+\frac{1}{\lambda_0}$$

$$\geqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n n!\left(\frac{n\mu}{\lambda}\right)^{k-n}$$

$$=\infty$$

所以，由定理9.3（甲）得知

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)=\frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k} \qquad (i\geqslant 0, j\geqslant 0)$$

定理10·2证毕。

现在我们来分析一下定理10·2。

（1） 条件 $\frac{\lambda}{n\mu}<1$ 的意义。我们知道 λ 是输入过程一泊松过程的强度，它的直观意义是"单位时间内来到的顾客的平均数"，而 μ 是服务时间所遵从的负指数分布的参数，它的直观意义是：$\frac{1}{\mu}$是每个顾客的"平均服务时间"，从而 μ 是一台服务设施"单位时间内服务完的顾客的平均数"，而今服务机构内有 n 台服务设施$\frac{\lambda}{\mu}$是"单位时间内来到此服务机构的全体顾客所需之总服务时间的平均数"，而今服务机构内共有 n 台服务设施，所以单位时间内总共能提供 n 个单位时间的服务。因此，当 $\frac{\lambda}{n\mu}>1$ 时，供不应求，势必等待服务的顾客数愈来愈多，对任何 $i\geqslant 0, j\geqslant 0$，总有

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)\equiv\lim_{t\to\infty} p(\eta_t=j\mid\eta_0=i)=0$$

服务系统不能达到平衡状态。而当 $\frac{\lambda}{n\mu}<1$ 时，供过于求，等待服务的顾客数不会愈来愈多，所以

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t)=\frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k} \qquad (i\geqslant 0,\ j\geqslant 0)$$

亦即服务系统能达到平衡。令$p_j=\lim_{t\to\infty} P(\eta_t=j)$，则

$$p_j=\lim_{t\to\infty}\sum_{i\geq 0}P(\eta_0=i)\quad p_{i,j}(t)=\frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k}\qquad (j\geqslant 0)$$

p_j 称服务系统处于平衡状态 j 的概率。显然

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_j=1$$

其中 ρ_k 由 (10·29) 所定义，即是

$$\rho_k=\begin{cases}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\dfrac{1}{k!} & \text{当}\quad 0\leqslant k\leqslant n\\[2ex] \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n\dfrac{1}{n!}\cdot\left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}=\rho_n\left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n} & \text{当}\quad k\geqslant n\end{cases}\tag{10·30}$$

$$p_i=\frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k}=\frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}}$$

$$=\frac{\rho_j}{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{1}{j!}}{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}}} & 0\leqslant j\leqslant n,\\[4ex] \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n}}{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}}}=p_n\left(\dfrac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n} & \\ i\geqslant n & \end{cases}\tag{10·31}$$

（2）顾客来到服务机构时，不能即刻接受服务，需要等待的概率p_w。

因为服务设施共有 n 台，所以一个顾客来到服务机构，不能即刻接受服务的充分必要条件是：服务系统处于的平衡状态 $j\geqslant n$ ，所以

$$p_w=\sum_{j=n}^{\infty}p_j \qquad (10\cdot32)$$

（3）服务机构内的总顾客（包括正在服务的与排队等待服务的）数的均值N_m。

显然

$$N_m=\sum_{j=0}^{\infty}jp_j \qquad (10\cdot33)$$

（4）等待服务的顾客数的均值$N_m(W)$。

显然

$$N_m(W)=\sum_{j=0}^{\infty}j\ p_{n+j} \qquad (10\cdot34)$$

定理10·3. 对$M/M/n$（等待）系统而言，设 $\frac{\lambda}{n\mu}<1$，

当系统达到平衡状态以后（即是 $P(\eta_t=j)=\sum_{i=0}^{\infty}P(\eta_0=i)p_{i,j}(t)\cong\sum_{i=0}^{\infty}P(\eta_0=i)p_i=p_i$，（当 t 充分大）），令来

到服务机构请求服务所须之等待时间为W，则

$$P(W>t)=p_n\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}}\cdot e^{-(n\mu-\lambda)t} \quad (t\geqslant 0) \qquad (10\cdot35)$$

证。令

$P_j(W>t)=P(W>t$|顾客到达时，服务系统处于平衡状态j)，则

$$P(W>t)=\sum_{j=0}^{\infty}p_jP_j(W>t) \qquad (10\cdot36)$$

显然

$$P_j(W>t)=0 \quad (t>0,\ j<n) \qquad (10\cdot37)$$

以（10·37）代入（10·36）得

$$P(W>t)=\sum_{j=n}^{\infty}p_jP_j(W>t) \qquad (10\cdot38)$$

下面我们来计算$P_j(W>t)$。

当服务系统处于平衡状态j（$j\geqslant n$)时，则其中n个顾客正在接受服务，$j-n$个顾客正在排队等待。所以这时新到来的顾客要在服务机构依次服务完$j-n+1$个顾客后，他才能被接受服务。因此若令$M(t)$为时间长度t内服务机构服务完的顾客个数，则

$$P_j(W>t)=\sum_{i=0}^{j-n}P(M(t)=i) \qquad (10\cdot39)$$

由于各顾客的服务时间相互独立且具有公共的以μ为参数的负指数分布。所以在该顾客等待时间内，每台服务设施的输出

过程（即服务完而离开服务机构的顾客）是一个以 μ 为强度的泊松过程（定理10·1正是这一结论的理论根据），而今该服务机构内共有 n 台设施（当然它们之间的服务是相互独立的），所以此服务机构的总的输出过程是一个以$n\mu$为强度的泊松过程。所以

$$P(M(t)=i)=e^{-(n\mu)t}\frac{(n\mu t)^i}{i!} \qquad (10\cdot40)$$

以（10·39）、（10·40）和(10·31)代入(10·38)得

$$P(W>t)=\sum_{j=n}^{\infty}p_j\sum_{i=0}^{j-n}e^{-n\mu t}\frac{(n\mu t)^i}{i!}$$

$$=\sum_{j=n}^{\infty}p_n\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n}e^{-n\mu t}\sum_{i=0}^{j-n}\frac{(n\mu t)^i}{i!}$$

$$=p_n e^{-n\mu t}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k\sum_{i=0}^{k}\frac{(n\mu t)^i}{i!}$$

$$=p_n e^{-n\mu t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(n\mu t)^i}{i!}\sum_{k=i}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k$$

$$=p_n e^{-n\mu t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(n\mu t)^i}{i!}\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^i\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}}$$

$$=p_n e^{-(n\mu-\lambda)t}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}} \qquad (10\cdot41)$$

其中p_n由（10·31）所定义。定理证毕。

系 1. 顾客需要等待的概率为

$$p_w = P(W>0) = p_n \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}} \qquad (10\cdot42)$$

这与（10·32）的结论是一致的。因为由（10·31）有

$$p_j = p_n\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n} \quad (j \geqslant n)$$

所以由（10·32）亦有

$$p_w = \sum_{j=n}^{\infty} p_i = p_n \sum_{j=n}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{j-n}$$

$$= p_n \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}}$$

系 2. 顾客到达服务机构后平均等待时间为

$$\mathrm{E}(W) = \int_0^{\infty}\left[t\frac{d}{dt}\left(1-P(W>t)\right)\right]dt$$

$$= \int_0^{\infty} t p_n \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}} \cdot (n\mu-\lambda)e^{-(n\mu-\lambda)t}dt$$

$$= \frac{p_n}{1-\frac{\lambda}{n\mu}} \cdot \frac{1}{(n\mu-\lambda)} = p_n \cdot \frac{n\mu}{(n\mu-\lambda)^2}$$

$$= p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \ \frac{n\mu}{(n\mu-\lambda)^2} \qquad (10\cdot43)$$

定理10·4. 就$M/M/1$（等待）系统而言，设$\frac{\lambda}{\mu}<1$，当系统达到平衡状态以后，在长为L的时间区间内（L相当

大）。

（1）忙期（即服务设施正在服务）的总长度及平均个数分别为

$$L_B=\frac{\lambda}{\mu}L \qquad Z(L_B)=L\frac{(\mu-\lambda)\lambda}{\mu} \tag{10·44}$$

（2）单个忙期的平均长度

$$L_B(1)=\frac{1}{\mu-\lambda} \tag{10·45}$$

（3）单个忙期内所服务的顾客平均数为

$$N(L_B(1))=\frac{\mu}{\mu-\lambda} \tag{10·46}$$

证．对$M/M/1$（等待)系统而言，正如定理10·2后面，对$\frac{\lambda}{n\mu}<1$（而今 $n=1$）的意义的分析那样，$\frac{\lambda}{\mu}$是“单位时间内来到此服务机构的全体顾客所需之总服务时间之平均数”亦即在相当长的时间L内，忙期总长度为

$$L_B=\frac{\lambda}{\mu}L$$

于是

各闲期（从服务机构变成闲置开始到新顾客到来为止这段时间）的总长度为

$$L-L_B=L\cdot\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

而在时间L内，闲期的平均个数为

$$\frac{L\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}{\frac{1}{\lambda}}=\lambda L\cdot\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

于由各个忙期与各一闲期在时间轴上是相间的，所以，在时间 L 内，忙期的平均个数亦为

$$Z(L_B)=\lambda L\cdot\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)=L\cdot\frac{(\mu-\lambda)\lambda}{\mu}$$

从而单个忙期的平均长度为

$$L_B(1)=\frac{L_B}{Z(L_B)}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

单个忙期内所服务的顾客的平均数为

$$N(L_B(1))=\frac{L_B(1)}{\dfrac{1}{\mu}}=\frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

(因为在忙期内，每个顾客的平均服务时间为$\frac{1}{\mu}\cdot$)。定理证毕。

（二）$M/M/n$（消失）系统。

在这一段中，恒设

（1）输入过程是以 λ 为强度的泊松过程；

（2）服务规则是消失制，即是当顾客到达时，若 n 个服务设题至少有一个空闲，则顾客马上被接受服务；若 n 个服务设施均被占用，则顾客就离开服务机构，或者说此顾客消失了。

（3）服务机构中服务设施的数目为 n，每个顾客的服务时间服从以 μ 为参数的负指数分布，从而每个顾客的平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。

（4）各顾客的服务时间是相互独立的，且与输入过程亦相互独立。

设 η_t是时刻 t 正在被服务的顾客数，则由于现在考虑的是$M/M/n$（消失）系统，所以η_t所可能取的值为 0,1,2,$\cdots$,n，共 $n+1$ 个值。

定理10·5$\{\eta_t,\ t\in[0,\infty)\}$是一个有限状态的（共 $n+1$ 个状态）时齐的马尔可夫过程，若令$P(t)=(p_{i,j}(t),i,j=0,1,\cdots,n)$是其转移矩阵，$Q=P'(0)=(p'_{i,j}(0),\ i,j=0,1,\cdots,n)$ 是其密度矩阵，记 $p'_{i,j}(0)=q_{i,j}$。则

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_n & -\mu_n \end{pmatrix}$$

其中 $\lambda_i\equiv\lambda$，$(0\leqslant i\leqslant n)$，$\mu_j=j\mu$，$(1\leqslant j\leqslant n)$。而且

$$p_j\equiv\lim_{t\to\infty}P(\eta_t=j)=p_0\cdot\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}\quad(j=1,\cdots,n)\tag{10·48}$$

其中

$$p_0=\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}\right)^{-1}\tag{10·49}$$

(10·48)—(10·49) 通常称为爱尔兰公式。它给出了 $t\to\infty$ 时，系统处于平衡状态 j 的概率。特别地

$$p_n=\left(\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}\right)^{-1}\tag{10·50}$$

是 n 个服务设施都正在进行服务的概率，亦即顾客到达时遭到拒绝服务而消失的概率，称之为消失概率。

由(10·48)、(10·49)得知：正在服务机构内被服务的顾客的平均数为

$$N_m = \sum_{j=0}^{n} jp_j = p_0 \sum_{j=0}^{n} j \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu} p_0 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} \qquad (10·51)$$

证．仿例9·1知 $\{\eta_t\}$ 是时齐的（有限状态的）马尔可夫过程。又 $P(\eta_{t+\Delta t}=i+1|\eta_t=i)$

$=P\big($ $[t, t+\Delta t)$ 内恰来一个顾客，且 i 个正在服务的顾客尚无一个结束服务 $\big)$

$+P([t, t+\Delta t)$ 内至少来二个顾客，且使 $\eta_{t+\Delta t}=i+1($

$\underline{\underline{记作}}$ $\text{I}(\Delta t)+\text{II}(\Delta t) \qquad (10·52)$

根据泊松输入与负指数分布的性质，以及输入过程与各顾客的服务时间相互独立可知：

$$\text{I}(\Delta t)=(\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t})(e^{-\mu\Delta t})^i$$

$$=\lambda\Delta t+0(\Delta t) \quad (\Delta t\to 0) \qquad (10·53)$$

$$\text{II}(\Delta t)=0(\Delta t) \quad (\Delta t\to 0) \qquad (10·54)$$

以(10·53)，(10·54)代入(10·52)得：

$$q_{i,i+1}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\text{I}(\Delta t)+\text{II}(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$=\lambda \quad (n>i\geqslant 0) \qquad (10·55)$$

而

$$P(\eta_{t+\Delta t}=i-1\mid\eta_t=i)$$

$=P$(在$[t,t+\Delta t)$无顾客到来，且 i 个顾客中恰有一个服务结束)

$+P$(在$[t,t+\Delta t)$至少来一个顾客，且 i 个顾客中至少有一个顾客服务结束，$\eta_{t+\Delta t}=i-1$)

记作 $\quad \text{I}^*(\Delta t)+\text{II}^*(\Delta t) \qquad (10\cdot56)$

而

$$\text{I}^*(\Delta t)=e^{-\lambda\Delta t}i(1-e^{-\mu\Delta t})(e^{-\mu\Delta t})^{i-1}$$

$$=i\mu\Delta t+0(\Delta t)\quad(\Delta t\to0) \qquad (10\cdot57)$$

$$0\leqslant\text{II}^*(\Delta t)\leqslant(1-e^{-\lambda\Delta t})(1-[e^{-\mu\Delta t}]^i)$$

$$=0(\Delta t)\quad(\Delta t\to0) \qquad (10\cdot58)$$

所以

$$q_{i,i-1}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\text{I}^*(\Delta t)+\text{II}^*(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$=i\mu\quad(i\geqslant1) \qquad (10\cdot59)$$

仿之易证：

$$\begin{cases}q_{0,0}=-\lambda\\ q_{i,i}=-(\lambda+i\mu)\quad(n>i\geqslant1)\quad q_{n,n}=-n\mu\\ q_{i,j}=0\quad(|i-j|>1)\end{cases} \qquad (10\cdot60)$$

总之（10·47）得证。

再用定理8·5(7)，解线性方程组

$$\begin{cases}(x_0,x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}q_{0,0}&q_{0,1}&\cdots&q_{0,n}\\ q_{1,0}&q_{1,1}&\cdots&q_{1,n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ q_{n,0}&q_{n,1}&\cdots&q_{n,n}\end{pmatrix}=0\\ x_i\geqslant0\quad(0\leqslant i\leqslant n)\end{cases}$$

得通解为

$$x_j=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}x_0=\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j x_0 \quad (j=1,2,\cdots n)$$

所以，由定理8·5(7)得：

$$\lim_{t\to\infty}p_{i,j}(t)=\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right)^{-1}$$

$(i=0,1,\cdots,n,\ j=0,1,\cdots,n)$ 故

$$p_j\equiv\lim_{t\to\infty}P(\eta_t=j)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\sum_{i=0}^{n}P(\eta_0=i)p_{i,j}(t)$$

$$=\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right)^{-1}$$

$(0\leqslant j\leqslant n)$ 定理证毕。

（三） $M/M/\infty$系统。

在这一段中，恒设

（1）输入过程是以λ为强度的泊松过程；

（2）服务规则就是先到先服务，注意，由于现在服务设施有无穷多个（理想的），故任一来到的顾客，既不需等待也不消失，因此这时无等待制与消失制的差别。

（3）服务机构中服务设施有无穷多个，每个顾客的服务时间服从以μ为参数的负指数分布，从而每个顾客的平均服务时间为$\frac{1}{\mu}$。

（4）各顾客的服务时间是相互独立的，且与输入过程亦相互独立。

设 η_t是时刻 t 正在服务的顾客数。

例9·1已证$\{\eta_t, t\in[0,\infty)\}$是一个生灭过程，其密度矩阵由（9·4）所给出。而$\{\eta_t\}$的其它特性，参看习题9·5。

习　　题

10·1. 对$M/M/n$（等待）系统而言，令$\lambda=2$，$\mu=\frac{3}{n}$，试求

（1）系统处于平衡状态 j 的概率p_j，$(j\geqslant 0)$；

（2）顾客来到服务机构，不能立即接受服务而需要等待的概率p_w；

（3）服务机构内的总顾客数的均值N_m；

（4）等待服务的顾客数的均值$N_m(W)$；

（5）顾客的平均等待时间$E(W)$。

10·2. 对$M/M/1$（等待）系统而言，已知$\lambda=2$，欲使忙期在整个时间中的比例不超过$\frac{2}{3}$，问服务设施在单位时间内至少能服务完多少个顾客。再问若忙期在整个时间中的比例恰为$\frac{2}{3}$，单个忙期的平均长度 $L_B(1)=$？单个忙期内所服务完的顾客平均数$N(L_B(1))$为何？单个闲期的平均长度为何？

10·3. 证明（10·60）。

10·4. 在$M/M/100$（消失）系统中，设每个顾客的平均服务时间为2秒，欲使消失概率 $p_{100}\leqslant\frac{1}{1000}$，问在输入过

程中，单位（秒）时间内来到的顾客的平均数最大是多少？（近似值）。

（提示：对 $m!$ 用史特令（Stirling）近似公式，再用

$\sum_{j=0}^{100}\frac{x^j}{j!}\cong e^x$。）

§ 11 正态过程

我们知道，正态分布在概率论中曾经扮演过很重要的角色。其原因起码有两点，一是实际问题中，许多随机变量的分布函数近似于正态分布（中心极限定理充分地说明了这点），二是正态分布具有许多优良的分析性质。在这一节中，我们将要粗略地介绍一下正态过程。正态过程在随机过程中的地位，从某种意义上说，有点类似于正态分布在概率论中的地位。其原因也是由许多重要的随机过程可以用正态过程来逼近，而且正态过程有许多优良的性质。

首先我们讨论一下正态随机变量的一些简单性质。

定义 11·1. 进称随机变量X是正态随机变量，（或者称X服从正态分布），如果 $X=\mu+\sigma Y$，其中μ是实数，σ是正数，Y是随机变量，其分布函数为

$$F_Y(x)\equiv P(Y<x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy,\ x\in(-\infty,\infty),$$

或者等价地，Y的特征函数为

$$\varphi_Y(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

易证 $\mathbf{E}(Y)=0$，$Var(Y)=1$，从而 $\mathbf{E}(X)=\mu$，$Var(X)=\sigma^2$，X的特征函数为 $\varphi_X(t)=e^{i\mu t}\varphi_Y(t\sigma)$。

对于期望为μ方差为σ^2的正态随机变量X，我们用$X\sim N(\mu,\ \sigma^2)$表之。若 $X\sim N(0,\ 1)$，则称X是标准正态随机

变量。

命题11·1. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是 n 个相互独立的正态随机变量，$X_k\sim N(\mu_k,\ \sigma_k^2)$，$k=1,\cdots,n$，则

$$\sum_{k=1}^{n}X_k\sim N\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k,\ \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right)$$

证 因为 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，所以根据独立随机变量之和的特征函数等于诸随机变量的特征函数之积可知：

$\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的特征函数为

$$\varphi(t)=\prod_{k=1}^{n}e^{i\mu_k t}e^{-\frac{1}{2}\sigma_k^2t^2}$$

$$=e^{i\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\right)t-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2t^2}$$

此即

$$\sum_{k=1}^{n}X_k\sim N\left(\sum_{k=1}^{n}\mu_k,\ \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right)$$

以后我们用“$X\overset{(d)}{\sim}Y$”表示 X 和 Y 的分布函数相同。

定义11·2. 称 n 维随机变量（$X_1,\cdots X_n$）是正态的，如果

$$(X_1,\cdots,X_n)\overset{(d)}{\sim}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{1,k}Z_k+b_1,\ \cdots,\sum_{k=1}^{m}a_{n,k}Z_k+b_n\right)$$

其中 $a_{r,k}$、b_r $(1\leqslant r\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m)$ 是实数，$\{Z_1,\cdots,Z_m\}$ 是 m 个相互独立的标准正态随机变量。

命题11·2. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是 n 维正态随机变量，$c_1,\cdots,c_n$ 是 n 个实数，则 $S=\sum_{r=1}^{n}c_rX_r$ 是正态随机变量。

证 由定义11·2，必存在实数 $a_{r,k}$，b_r，$(1\leqslant r\leqslant n,\ 1\leqslant k\leqslant m)$ 及相互独立的标准正态随机变量 $Z_1,\cdots,Z_m$，使

$$(X_1,\cdots,X_n)\overset{(d)}{\sim}\left(\sum_{k=1}^{m}a_{1,k}Z_k+b_1,\cdots,\sum_{k=1}^{m}a_{n,k}Z_k+b_n\right)$$

所以

$$S=\sum_{r=1}^{n}c_rX_r\overset{(d)}{\sim}\left(\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{r=1}^{n}c_ra_{r,k}\right]Z_k+\sum_{r=1}^{n}c_rb_r\right)$$

而上式右方是正态随机变量，故 S 亦然。

注意：直接验证可知：

$$\mathbf{E}(S)=\sum_{r=1}^{n}c_r\mathbf{E}(X_r)$$

$$Var(S)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov(X_r,X_j)c_rc_j$$

其中

$$Cov(X_r,X_j)\equiv\mathbf{E}((X_r-\mathbf{E}(X_r))(X_j-\mathbf{E}(X_j)))$$

是 X_r 和 X_j 的协方差。

定理11·1. n 维随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是正态的充要

条件是：

其特征函数 $\mathbf{E}(e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)})$ 为

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n)=e^{it'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t} \tag{11·1}$$

其中

$$t=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\\vdots\\t_n\end{pmatrix}\quad t'=(t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}\quad \sum=\begin{pmatrix}\sigma_{1,1}&\sigma_{1,2}&\cdots&\sigma_{1,n}\\\sigma_{2,1}&\sigma_{2,2}&\cdots&\sigma_{2,n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\sigma_{n,1}&\sigma_{n,2}&\cdots&\sigma_{n,n}\end{pmatrix}$$

$\sigma_{j,k}=\mathrm{Gov}(X_j,\ X_k)\quad \mu_k=\mathbf{E}(X_k)\quad (1\leqslant j,\ k\leqslant n)$

Σ是 n 阶实元素的非负定对称方阵。

证。（1）必要性。设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是 n 维正态随机变量。则由命题 11·2 得知 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_kX_k$ 是正态随机变量。令其特征函数为

$$\varphi_{t_1,\cdots,t_n}(u)\equiv\mathbf{E}\left(e^{iu\sum\limits_{k=1}^{n}t_kX_k}\right)$$

则

$$\varphi_{t_1,\cdots,t_n}(u)=e^{iu\mathbf{E}(\sum\limits_{k=1}^{n}t_kX_k)-\frac{1}{2}u^2\mathrm{Var}(\sum\limits_{k=1}^{n}t_kX_k)}$$

若令 $\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}$，$\sum=(\sigma_{j,k},\ 1\leqslant j,\ k\leqslant n)$，$\mu_j=\mathbf{E}(X_j)$，

$\sigma_{j,k}=\text{Cov}(X_j,X_k)\quad t'=(t_1,\cdots,t_n)$ 则

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right)=t'\mu$$

$$0\leqslant \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} t_k X_k\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} t_j\sigma_{j,k}t_k=t'\Sigma t$$

所以Σ是非负定的对称方阵，且 $(X_1, \cdots, X_n)$ 的特征函数为

$$\mathbf{E}\left(e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k}\right)=\varphi_{t_1,\cdots,t_n}(1)=e^{it'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t}$$

必要性获证。

（2）充分性。设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的特征函数为

$$\varphi(t_1,\cdots,t_n)=e^{it'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t}$$

其中 $t'=(t_1,\cdots,t_n)$，$t=\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix}$，$\mu$ 和Σ满足定理中所给之条件。则存在 n 阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

使

$\Sigma=AA'$ 其中A'是A的转置方阵。取 $Z_1,\cdots,Z_n$ 为 n 个相互独立的标准正态随机变量，令 $\varphi_0(u)=e^{-\frac{1}{2}u^2}$ 为Z_k的特征函数，再令

$$Y_r=\sum_{k=1}^{n} a_{r,k} Z_k+\mu_r \qquad 1\leqslant r\leqslant n$$

则 $(Y_1,\cdots,Y_n)$ 的特征函数为

$$\psi(t_1,\cdots,t_n)=\mathbf{E}(e^{i(t_1Y_1+\cdots+t_nY_n)})$$

$$=\mathbf{E}\left(e^{i(t_1\mu_1+\cdots+t_n\mu_n)+i\sum\limits_{r=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}t_r a_{r,k}Z_k}\right)$$

$$=e^{it'\mu}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left(e^{i(\sum\limits_{r=1}^{n}t_r a_{r,k})Z_k}\right)$$

$$=e^{it'\mu}\prod_{k=1}^{n}\varphi_0\left(\sum_{r=1}^{n}t_r a_{r,k}\right)$$

$$=e^{it'\mu}\prod_{k=1}^{n}\left(e^{-\frac{1}{2}(\sum\limits_{r=1}^{n}t_r a_{r,k})^2}\right)$$

$$=e^{it'\mu}\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{1}{2}(\sum\limits_{r=1}^{n}t_r a_{r,k})(\sum\limits_{s=1}^{n}t_s a_{s,k})}$$

$$=e^{it'\mu}\cdot e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{r=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{n}(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{r,k}a_{s,k})t_r t_s}$$

$$=e^{it'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t}$$

所以由特征函数与分布函数相互唯一决定知：

$$(X_1,\cdots,X_n)\overset{(d)}{\sim}(Y_1,\cdots,Y_n)$$

亦即 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是 n 维正态随机变量。

定理11·2. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是 n 维正态随机变量，

$$Y_1=c_{1,1}X_1+c_{1,2}X_2+\cdots+c_{1,n}X_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Y_m=c_{m,1}X_1+c_{m,2}X_2+\cdots+c_{m,n}X_n,$$

$c_{j,k}$为实数，$(1\leqslant j\leqslant m,\ 1\leqslant k\leqslant n)$，则 $(Y_1,\cdots,Y_m)$ 是 m 维正态随机变量，且其特征函数为

$$\varphi_{Y_1,\cdots,Y_m}(t_1,\cdots,t_m)=\mathbf{E}\left(e^{i(t_1Y_1+\cdots+t_mY_m)}\right)$$

$$=\exp\left\{i\sum_{j=1}^{m}t_j\mathbf{E}(Y_j)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}t_jt_k\mathrm{Cov}(Y_j,Y_k)\right\}$$

$$(11\cdot2)$$

其中

$$\mathbf{E}(Y_j)=c_{j,1}\mathbf{E}(X_1)+\cdots+c_{j,n}\mathbf{E}(X_n)\qquad(11\cdot3)$$

$$\mathrm{Cov}(Y_j,Y_k)=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}c_{j,p}c_{k,q}\mathrm{Cov}(X_p,X_q)\qquad(11\cdot4)$$

证 因为

$$\sum_{j=1}^{m}t_jY_j=\sum_{j=1}^{m}t_j\sum_{p=1}^{n}c_{j,p}X_p$$

$$=\sum_{p=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{m}t_jC_{j,p}\right\}X_p\qquad(11\cdot5)$$

若令

$$S_p=\sum_{j=1}^{m} t_j c_{j,p} \qquad (p=1,\cdots,n)$$

$$\varphi_{X_1,\cdots,X_n}(t_1,\cdots,t_n)=\mathbf{E}\left(e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right)$$

为 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的特征函数，则由 (11·5) 得

$$\varphi_{Y_1,\cdots,Y_m}(t_1,\cdots,t_m)=\varphi_{X_1,\cdots,X_n}(s_1,\cdots,s_n) \qquad (11\cdot6)$$

直接用定理 11·1 计算 (11·6) 右边之特征函数发现它就是 (11·2) 式右边。定理证毕。

定理 11·3. 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 是 n 维正态随机变量，则 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立的充要条件是它们两两不相关（即 $\mathrm{Cov}(X_j,X_k)=0$, $(j\neq k)$）。

证 令 $\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$ $\qquad \sum=(\sigma_{k,j},\ 1\leqslant k,\ j\leqslant n)$

$\mu_k=\mathbf{E}(X_k)$, $\sigma_{k,j}=\mathrm{Cov}(X_k,\ X_j)$, 则由定理 11·1 知: $(X_1,\cdots,X_n)$ 的特征函数为

$$\mathbf{E}\left(e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right)=e^{it'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t}\ \sum t$$

又 X_k 的特征函数为

$$\mathbf{E}\left(e^{it_kX_k}\right)=e^{it_k\mathbf{E}(X_k)-\frac{1}{2}t_k^2\mathrm{var}(X_k)}$$

$$=e^{it_k\mu_k-\frac{1}{2}t_k^2\sigma_{k,k}} \qquad 1\leqslant k\leqslant n$$

所以

$X_1,\cdots,X_n$ 相互独立

$$\Longleftrightarrow \mathbf{E}\left(e^{i(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right)=\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}\left(e^{it_kX_k}\right)$$

$$\Longleftrightarrow e^{it'\mu-\frac{1}{2}t'\Sigma t}=\prod_{k=1}^{n}e^{it_k\mu_k-\frac{1}{2}t_k^2\sigma_{k,k}}$$

$$\Longleftrightarrow t'\sum t=\sum_{k=1}^{n}t_k^2\sigma_{k,k}$$

$$\Longleftrightarrow \sigma_{j,k}=0 \qquad (j\neq k)$$

定理证毕。

定理11·4. 设 (X_1, X_2) 是二维随机变量，如果

$$\mathbf{E}([X_2-(a_0X_1+b_0)]^2)\leqslant\mathbf{E}([X_2-(aX_1+b)]^2)$$

对一切 $a,b\in(-\infty, \infty)$ 成立，则

$$\mathbf{E}([X_2-(a_0X_1+b_0)]X_1)=0$$

证 （1）任取 $c>0$。由假设有

$$\mathbf{E}([X_2-(a_0X_1+b_0)]^2)\leqslant\mathbf{E}([X_2-(a_0X_1+b_0)-cX_1]^2($$

$$=\mathbf{E}([X_2-(a_0X_1+b_0)]^2)$$

$$-2c\mathbf{E}([X_2-(a_0X_1+b_0)]X_1)+c^2\mathbf{E}(X_1^2)$$

所以

$$2\mathbf{E}([X_2-(a_0X_1+b_0)]X_1)\leqslant c\mathbf{E}(X_1^2)$$

（对一切 $c>0$）成立，因此

$$\mathbf{E}([X_2-(a_0X_1+b_0)]X_1)\leqslant 0$$

（2）任取 $c<0$，仿（1）可证

$$\mathbf{E}([X_2-(a_0X_1+b_0)]X_1)\geqslant 0$$

定理得证。

下面我们来研究正态过程。

定义11·3. 称随机过程 $\{X_t, t\in T\}$ 是正态过程，如果对任何正整数 n，任何 $t_1,\cdots,t_n$，$(t_i\in T, i=1,\cdots,n)$，$(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})$ 是 n 维正态随机变量。（一般而言 $T=[0, \infty)$、$[a, b]$ 或非负整数。）

正态过程中一个很重要的特例是所谓的维纳（Wiener）过程。

定义11·4.（维纳过程）称随机过程 $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 是一个以σ^2为参数的维纳过程，如果它满足

（1）$X_0\equiv 0$；

（2）对每个 $t>0$，$X_t\sim N(0, \sigma^2 t)$；

（3）具有独立增量；

（4）具有平稳增量。

定理11·5. 若 $\{X_t, t\in[0, \infty)\}$ 是以 σ^2 为参数的维纳过程，则

$$(X_t-X_s)\sim N(0, |t-s|\sigma^2)$$

证　不妨令 $t>s$。因为 $X_t=(X_t-X_s)+(X_s-X_0)$，而 (X_t-X_s) 与 (X_s+X_0) 相互独立，所以

$$\mathbf{E}(e^{iuX_t})=\mathbf{E}(e^{iu(X_t-X_s)})\mathbf{E}(e^{iuX_s})$$

因此，

$$\mathbf{E}(e^{iu(X_t-X_s)})=\mathbf{E}(e^{iuX_t})/\mathbf{E}(e^{iuX_s})$$

$$=e^{-\frac{1}{2}u^2t\sigma^2}/e^{-\frac{1}{2}u^2s\sigma^2}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}u^2(t-s)\sigma^2}$$

即是

$$(X_t-X_s)\sim N(0, (t-s)\sigma^2)$$

定理11·6. 维纳过程必为正态过程。

证　任取正整数n，任取 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n$，由于 $X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$，$X_{t_{n-1}}-X_{t_{n-2}}$，$\cdots$，X_{t_1}相互独立，且 $(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})\sim N(0,(t_i-t_{i-1})\sigma^2)$，所以

$$(X_{t_1}, (X_{t_2}-X_{t_1}), \cdots, (X_{t_n}-X_{t_{n-1}}))$$

是 n 维正态随机变量。又因为

$$\begin{pmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2} \\ X_{t_3} \\ \vdots \\ X_{t_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t_1} \\ X_{t_2}-X_{t_1} \\ X_{t_3}-X_{t_2} \\ \cdots\cdots \\ X_{t_n}-X_{t_{n-1}} \end{pmatrix}$$

所以由定理11·2 得知 $(X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \cdots, X_{t_n})$ 是 n 维正态随机变量。定理证毕。

定义 11·5。设 $\{Z_n, n\geqslant 0\}$ 是一串随机变量，$\mathbf{E}(Z_n^2)<\infty$，$\mathbf{E}(Z^2)<\infty$。如果

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(|Z_n-Z|^2)=0 \qquad (11·7)$$

则说 $\{Z_n\}$ 均方收敛到 Z，记作

$$\lim_{n\to\infty}Z_n=Z,\ [L^2]，或者\ Z_n\xrightarrow{L^2}Z \qquad (11·8)$$

设 $\{Z_t, t\in T\}$ 是一族随机变量，$t_0\in T$，若

$$\lim_{\substack{t\to t_0\\ t\in T}} Z_t=Z_{t_0} \quad [L^2] \qquad (11·9)$$

则说 $\{Z_t\}$ 在 t_0 均方连续，如果 $\{Z_t\}$ 在每一个 $t_0\in T$ 皆均方连续，则称 $\{Z_t\}$ 是均方连续的。

定理11·7。设 Z_n 是正态随机变量，$(n=0,1,2,\cdots)$，$Z_n\xrightarrow{L^2}Z$，则 Z 亦为正态随机变量。

证 令 Z_n 和 Z 的特征函数分别为 $\varphi_n(t)$ 和 $\varphi(t)$，再令 $\mu_n=\mathbf{E}(Z_n)$，$\sigma_n^2=\mathrm{Var}(Z_n)$，$\mu=\mathbf{E}(Z)$，$\sigma^2=\mathrm{Var}(Z)$ 则由定理假设知

$$\varphi_n(t)=e^{i\mu_n t-\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} \qquad (n\geqslant 0) \tag{11·10}$$

为证Z是正态随机变量，只须证明其特征函数为

$$\varphi(t)=e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2 t} \tag{11·11}$$

为此，又只须证明：

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t) \qquad t\in(-\infty,\ \infty) \tag{11·12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n=\mu \tag{11·13}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2=\sigma^2 \tag{11·14}$$

事实上，由

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(|Z_n-Z|^2)=0 \tag{11·15}$$

及

$$\begin{aligned}|\varphi_n(t)-\varphi(t)|&=|\mathbf{E}(e^{itZ_n}-e^{itZ})|\\ &\leqslant\mathbf{E}(|e^{itZ_n}-e^{itZ}|)\leqslant|t|\mathbf{E}(|Z_n-Z|)\\ &\leqslant|t|\{\mathbf{E}(|Z_n-Z|^2)\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{11·16}$$

$$|\mu_n-\mu|\leqslant\mathbf{E}(|Z_n-Z|)\leqslant\{\mathbf{E}(|Z_n-Z|^2)\}^{\frac{1}{2}} \tag{11·17}$$

$$\begin{aligned}|\sigma_n-\sigma|^2&=\sigma_n^2-2\sigma_n\sigma+\sigma^2\\ &=\sigma_n^2+\sigma^2-2\{\mathbf{E}(|Z_n-\mu_n|^2)\mathbf{E}(|Z-\mu|^2)\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant\sigma_n^2+\sigma^2-2\mathbf{E}(|Z_n-\mu_n||Z-\mu|)\\ &\leqslant\sigma_n^2+\sigma^2-2\mathbf{E}((Z_n-\mu_n)(Z-\mu))\\ &=\mathrm{Var}(Z_n-Z)\\ &=\mathbf{E}(|Z_n-Z|^2)-\{\mathbf{E}(Z_n-Z)\}^2\end{aligned} \tag{11·18}$$

可得（11·12）、（11·13）、（11·14）。定理得证。

定义11·6．（随机过程的微分与积分）

设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个随机过程，$0\leqslant a<b<\infty$，如果存在随机变量Y，使得对 $[a,\ b)$ 的任何一个分划$\triangle$：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

只要 $\delta(\varDelta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{t_i-t_{i-1}\}\to 0$ 都有

$$\lim_{\delta(\varDelta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}X_{t_i}\{t_i-t_{i-1}\}=Y\quad[L^2]\qquad(11\cdot 19)$$

则称 $\{X_t\}$ 在 $[a,\ b)$ 上是均方可积的，Y称为它在$[a,b)$上的积分，记作

$$\int_{[a,b)}X_t dt=Y$$

类似地，若 $t_0\in[0,\ \infty)$，且存在随机变量 Y_{t_0}，使

$$\lim_{h\to 0}\frac{X_{t_0+h}-X_{t_0}}{h}=Y_{t_0}\quad[L^2]\qquad(11\cdot 20)$$

则称 $\{X_t\}$ 在 t_0是可导的，Y_{t_0}称为它在 t_0 的导数，记作 $X'_{t_0}=X'_t|_{t=t_0}=Y_{t_0}$，如果对每个 $t\in[0,\ \infty)$，$\{X_t\}$ 在 t 皆可导，则称 $\{X_t\}$ 是可导的，$\{X'_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 称为其导过程。

在这节开始时，我们曾说过正态过程有许多良好的性质。下面的定理就是一例。

定理11·8。设 $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 是正态过程。

（1）若令 $W_t=X_{t+a}$，（a是一个正数），则 $\{W_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个正态过程；

（2）若 $\{X_t\}$ 在 $[a,b)$ 上均方可积，则

$$\int_{[a,b)}X_t dt$$

是一个正态随机变量；

（3）若 $\{X_t\}$ 可导，则其导过程 $\{X'_t, t\in[0,\infty)\}$ 中每个 X'_t 亦为正态随机变量。

证。用定理11·2和定理11·7并注意随机过程的积分与导数的定义立即可得定理11·8。

定理 11·9. 设 $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 是一个正态过程，$\mathbf{E}(X_t)\equiv 0$，$(t\in[0,\infty))$，$K(s,t)=\mathrm{Cov}(X_s,X_t)$，$(s,t\in[0,\infty))$。则对任何 $s,t,h\in[0,\infty)$ 有：

$$\mathbf{E}(X_t^2)=K(t,t) \tag{11·21}$$

$$\mathrm{Var}(X_t^2)=2K^2(t,t) \tag{11·22}$$

$$\mathrm{Cov}(X_s^2,X_t^2)=2K^2(s,t) \tag{11·23}$$

$$\mathbf{E}(X_tX_{t+h})=K(t,\ t+h) \tag{11·24}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(X_tX_{t+h})\\&=K(t,\ t)K(t+h,\ t+h)+K^2(t,\ t+h)\end{aligned} \tag{11·25}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}(X_sX_{s+h},\ X_tX_{t+h})\\&=K(s,t)K(s+h,t+h)\\&\quad+K(s,t+h)K(s+h,t)\end{aligned} \tag{11·26}$$

证。(11·21)、(11·24) 由 $K(s.t)$ 的定义立即可得。而 (11·22)、(11·23)、(11·25) 皆 (11·26) 之特例，所以为证定理 11·9，只须证明 (11·26) 。为此，我们先证明一个有关正态随机变量的公式：

若 (X_1,X_2,X_3,X_4) 是一个四维正态随机变量，且

$\mathbf{E}(X_j)=0$，$1\leqslant j\leqslant 4$，则

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(X_1X_2X_3X_4)\\&=\mathbf{E}(X_1X_2)\mathbf{E}(X_3X_4)+\mathbf{E}(X_1X_3)\mathbf{E}(X_2X_4)\\&\quad+\mathbf{E}(X_1X_4)\mathbf{E}(X_2X_3)\end{aligned} \tag{11·27}$$

事实上，若令 $\varphi(t_1,t_2,t_3,t_4)$ 为 (X_1,X_2,X_3,X_4) 的特征函数，则

$$\varphi(t_1,t_2,t_3,t_4)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}t_jt_k\mathbf{E}(X_jX_k)\right\} \tag{11·28}$$

$$\mathbf{E}(X_1X_2X_3X_4)=\frac{\partial^4}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3\partial t_4}\varphi(0,0,0,0) \tag{11·29}$$

简记（11·28）右方为 φ，$L_j=\sum_{k=1}^{4}t_k\mathbf{E}(X_jX_k)$，$(1\leqslant j\leqslant 4)$，则

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}=-\varphi L_1$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_1\partial t_2}=\varphi[L_1L_2-\mathbf{E}(X_1X_2)]$$

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3}=\varphi[-L_1L_2L_3+L_3\mathbf{E}(X_1X_2)+L_2\mathbf{E}(X_1X_3)+L_1\mathbf{E}(X_2X_3)]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4\varphi}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3\partial t_4}=\varphi[&L_1L_2L_3L_4-L_1L_2\mathbf{E}(X_3X_4)\\&-L_1L_3\mathbf{E}(X_2X_4)-L_1L_4\mathbf{E}(X_2X_3)\\&-L_2L_3\mathbf{E}(X_1X_4)-L_2L_4\mathbf{E}(X_1X_3)\\&-L_3L_4\mathbf{E}(X_1X_2)\\&+\mathbf{E}(X_1X_2)\mathbf{E}(X_3X_4)\\&+\mathbf{E}(X_1X_3)\mathbf{E}(X_2X_4)\\&+\mathbf{E}(X_1X_4)\mathbf{E}(X_2X_3)\end{aligned} \tag{11·30}$$

由（11·30）、（11·29）及 $\varphi(0,0,0,0)=1$，$L_j(0,0,0,0)$

$=0$ 即得（11·27）。

现在我们用（11·27）来证明（11·26）。事实上，由（11·27）得

$$
\begin{aligned}
(11\cdot 26)\text{ 左边} &= \mathbf{E}(X_sX_{s+h}X_tX_{t+h}) \\
&\quad - \mathbf{E}(X_sX_{s+h})\mathbf{E}(X_tX_{t+h}) \\
&\overset{(11\cdot 27)}{=\!=} \mathbf{E}(X_sX_t)\mathbf{E}(X_{s+h}X_{t+h}) \\
&\quad + \mathbf{E}(X_sX_{t+h})\mathbf{E}(X_{s+h}X_t) \\
&= K(s,t)K(s+h,t+h) \\
&\quad + K(s,t+h)K(s+h,t)
\end{aligned}
$$

定理证毕。

在这节开始我们提到过许多随机过程可以用正态过程来逼近。作为这一节的最后一部分，我们简略地讨论一下这个问题。

定义11·7. 设对每个固定的参量 k，$\{X_t^{(k)}, t\in[0,\infty)\}$ 是一个随机过程。如果对每一个正整数 n，及 $t_i\in[0,\infty)$，$(i=1,\cdots,n)$，$(X_{t_1}^{(k)},\cdots,X_{t_n}^{(k)})$ 当 $k\to a$ 时是渐近正态随机变量，即是 $0<\mathbf{E}(|X_t^{(k)}|^2)<\infty$，且

$$
\lim_{k\to a}\left[\mathbf{E}\left(\exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}u_jY_{t_j}^{(k)}\right\}\right)\right.
$$

$$
\left.-\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}u_j\rho(X_{t_j}^{(k)},X_{t_r}^{(k)})u_r\right\}\right]
$$

$$
=0 \qquad (\text{对一切 } u_j\in(-\infty,\infty)\ 1\leqslant j\leqslant n) \tag{11·31}
$$

其中

$$Y_t^{(k)}=\frac{X_t^{(k)}-\mathbf{E}(X_t^{(k)})}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_t^{(k)})}}$$

是 $X_t^{(k)}$ 的标准化（$Y_t^{(k)}$ 的期望为0方差为1），

$$\rho(X_{t_j}^{(k)},X_{t_r}^{(k)})=\frac{\operatorname{Cov}(X_{t_j}^{(k)},X_{t_r}^{(k)})}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_{t_j}^{(k)})\operatorname{Var}(X_{t_r}^{(k)})}}$$

是 $X_{t_j}^{(k)}$ 和 $X_{t_r}^{(k)}$ 的相关系数，则称 $\{X_t^{(k)}.t\in[0,\infty)\}$ 当 $k\to a$ 时是渐近正态过程。

注意：（1）（11·31）的概率意义是：当 $k\to a$ 时，

$$(Y_{t_1}^{(k)},\cdots,Y_{t_n}^{(k)})$$

的特征函数渐近地为正态特征函数

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}u_j\operatorname{Cov}(Y_{t_j}^{(k)},Y_{t_r}^{(k)})u_r\right\}$$

（2）此定义中之参量 k 可以是 m 维欧氏空间 R^m 中任一点（$m\geqslant1$），a 可以是 R^m 中某一点，也可能是无穷远点。

定理11·10．设对每个 $\lambda>0$，$\delta>0$，$\{X_t^{(\lambda)},t\in[0,\infty)\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，$\{\xi_n^{(\delta)},n=1,2,\cdots\}$ 是一串相互独立的具有公共分布的随机变量，且 $\{\xi_n^{(\delta)}\}$ 与 $\{X_t^{(\lambda)}\}$ 亦相互独立，$P(\xi_n^{(\delta)}=\delta)=P(\xi_n^{(\delta)}=-\delta)=\frac{1}{2}$，令

$$Y_t^{(\lambda,\delta)}=\sum_{n=1}^{X_t^{(\lambda)}}\xi_n^{(\delta)}\qquad(t\in[0,\infty))\tag{11·32}$$

则当 $\lambda\to\infty$，$\lambda\delta^2=\sigma^2$ 时，$\{Y_t^{(\lambda,\delta)},t\in[0,\infty)\}$ 是渐近维纳过程（更是渐近正态过程），更精确地说，$\{Y_t^{(\lambda,\delta)}$，

$t\in[0, \infty)\}$ 满足下列条件：

（1）$Y_0^{(\lambda,\delta)}\equiv 0$；

（2）对每个 $t>0$，当 $\lambda\to\infty$，$\lambda\delta^2=\sigma^2$ 时，$Y_t^{(\lambda,\delta)}$ 渐近地服从正态分布 $N(0, \sigma^2 t)$，亦即

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\delta^2=\sigma^2}}\left|\mathbf{E}\left(e^{iuY_t^{(\lambda,\delta)}}\right)-e^{-\frac{1}{2}u^2\lambda\delta^2 t}\right|=0 \qquad (11\cdot 33)$$

对一切 $u\in(-\infty, \infty)$ 成立；

（3）$\{Y_t^{(\lambda,\delta)}, t\in[0, \infty)\}$ 具有独立增量；

（4）$\{Y_t^{(\lambda,\delta)}, t\in[0, \infty)\}$ 具有平稳增量。

证。显然，对每个固定的 $\lambda>0$，$\delta>0$，$\{Y_t^{(\lambda,\delta)}, t\in[0, \infty)\}$ 是复合泊松过程（参见定义 3·4，），因此，由定理 3·4 得知本定理之（1）、（3）、（4）成立，从而为证本定理，只须证明（11·33）成立即可。

若令 $Y_t^{(\lambda,\delta)}$ 的特征函数为

$$\varphi_{t,\lambda,\delta}(u)=\mathbf{E}(e^{iuY_t^{(\lambda,\delta)}}) \qquad u\in(-\infty, \infty)$$

再令 $\xi_n^{(\delta)}$ 的特征函数为

$$\psi_\delta(u)=\mathbf{E}(e^{iu\xi_n^{(\delta)}}) \qquad u\in(-\infty, \infty)$$

则由定理3·4的（3）得

$$\varphi_{t,\lambda,\delta}(u)=e^{\lambda t(\psi_\delta(u)-1)} \qquad (11\cdot 34)$$

而令 $P(\xi_n^{(\delta)}=\delta)=P(\xi_n^{(\delta)}=-\delta)=\frac{1}{2}$，所以

$$0=\mathbf{E}(\xi_n^{(\delta)})=\frac{1}{i}\psi_\delta'(0) \qquad (11\cdot 35)$$

$$\delta^2=\mathbf{E}([\xi_n^{(\delta)}]^2)=-\psi_\delta''(0) \qquad (11\cdot 36)$$

由特征函数的泰勒（Taylor）展开（参看文献〔2〕第二

章定理5·3）可得

$$\phi_\delta(u)=1+\phi_\delta'(0)u+\phi_\delta''(0)\frac{u^2}{2!}+\int_0^u\phi_\delta^{(3)}(s)\frac{(u-s)^2}{2!}ds$$

$$=1-\frac{1}{2}\delta^2u^2+\int_0^u\phi_\delta^{(3)}(s)\frac{(u-s)^2}{2!}ds$$

从而，

$$\begin{aligned}&\lambda t(\phi_\delta(u)-1)\\&=-\frac{1}{2}\lambda\delta^2u^2t+\int_0^u\lambda t\phi_\delta^{(3)}(s)\frac{(u-s)^2}{2!}ds\end{aligned} \qquad (11\cdot37)$$

而若注意特征函数的 k 阶导数的模≤其对应的随机变量的 k 阶绝对矩则可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^u\lambda t\phi_\delta^{(3)}(s)\frac{(u-s)^2}{2!}ds\right|\\&\leqslant\sup_{-\infty<s<\infty}|\phi_\delta^{(3)}(s)|\lambda t\left|\int_0^u\frac{(u-s)^2}{2!}ds\right|\\&\leqslant\mathbf{E}(|\xi_n^{(\delta)}|^3)\lambda t\frac{|u^3|}{3!}\\&=\delta^3\lambda t\frac{|u^3|}{3!}=\delta\sigma^2t\frac{|u^3|}{3!}\end{aligned} \qquad (11\cdot38)$$

由（11·34）、（11·37）、（11·38）可得

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \lambda\delta^2=\sigma^2}}|\varphi_{t,\lambda,\delta}(u)-e^{-\frac{1}{2}u^2\lambda\delta^2t}|=0$$

此即（11·33）成立。定理证毕。

注意：由 $\lambda\to\infty$，$\lambda\delta^2=\sigma^2$ 是常数，所以必有 $\delta\to0$。

定理11·10的直观意义是非常明显的。假定一个质点在直线上作随机徘徊，设在［0，t）时间区间内徘徊的次数是

$X_t^{(\lambda)}$，而 $\{X_t, t\in[0, \infty)\}$ 构成一个强度为 λ 的泊松过程。再设每徘徊一次以 $\frac{1}{2}$ 的概率向左移动 δ，以 $\frac{1}{2}$ 的概率向右移动 δ，即是若令 $\xi_n^{(\delta)}$ 是第 n 次位移（带方向），则 $P(\xi_n^{(\delta)}=\delta)=P(\xi_n^{(\delta)}=-\delta)=\frac{1}{2}$，$(n=1,2,\cdots)$ 再令

$$Y_t^{(\lambda,\delta)}=\sum_{n=1}^{X_t^{(\lambda)}}\xi_n^{(\delta)} \qquad (t\in[0, \infty))$$

则 $Y_t^{(\lambda,\delta)}$ 是 $[0, t)$ 内该质点的总位移。所谓 $\lambda\to\infty$，$\delta\to 0$ 的直观意义是什么呢？我们知道 $\lambda=\mathbf{E}(X_1^{(\lambda)})$ 是单位时间内该质点的平均徘徊次数，而 δ 是每次徘徊的距离。因此，$\lambda\to\infty$，$\delta\to 0$ $(\delta^2\lambda=\sigma^2)$ 意味着单位时间内平均的徘徊次数无限增加，而每次徘徊的距离却无限变小，且平均徘徊次数与每次徘徊距离的平方的乘积保持一个常量 σ^2。在这样的条件下 $\{Y_t^{(\lambda,\delta)}, t\in[0, \infty)\}$ 近似于维纳过程。而 λ 无限增大，δ 无限变小，$\lambda\delta^2=\sigma^2$ 保持为一个常量 σ^2 的随机徘徊，正是物理中的布朗运动（Brownian Motion）。因此，维纳过程正是物理中的布朗运动的数学模型。所以，有的作者就把维纳过程称为布朗运动。

习　　题

11·1. 设 $\{W_t, t\in[0, \infty)\}$ 是一个维纳过程（参看定义11·4）。再令

(a) $X_t=(1-t)W_{\frac{t}{1-t}}$,　　$0\leqslant t<1$;

(b) $X_t=e^{-\beta t}W_{e^{2\beta t}}$，$0\leqslant t<\infty$,

（β 是一正数）;

（c）$X_t=W_t^2$，$0\leqslant t<\infty$，

试求：

（1）$m(t)\equiv\mathbf{E}(X_t)$，

（2）$K(s,t)\equiv\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$，

并判断 $\{X_t\}$ 是否为正态过程。

11·2．试造一例，说明 X_1 和 X_2 分别为一维正态随机变量，而（X_1，X_2）不是二维正态随机变量，即是 X_i 服从正态分布，（$i=1,2$），但（X_1,X_2）的联合分布不是二维正态分布。

（提示：令 Y_1 和 Y_2 是二个相互独立的服从标准正态分布的随机变量。定义

$$X_2=\begin{cases}|Y_2| & \text{当 } Y_1\geqslant 0\\ -|Y_2| & \text{当 } Y_1<0\end{cases}\qquad X_1\equiv Y_1$$

注意

$$\begin{aligned}
&P(X_1<x_1,\ X_2<x_2)\\
=&P(Y_1<x_1,\ Y_1\geqslant 0,\ |Y_2|<x_2)\\
&+P(Y_1<x_1,\ Y_1<0,\ -|Y_2|<x_2)\\
=&\iint\limits_{\substack{0\leq t_1<x_1\\ |t_2|<x_2}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)}\,dt_1dt_2\\
&+\iint\limits_{\substack{t_1<min(0,x_1)\\ |t_2|>-x_2}}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2)}\,dt_1dt_2,
\end{aligned}$$

特别地当 $x_1<0$，$x_2>0$ 时，再算

$$P(X_1<x_1,\ X_2<x_2)$$

最后证明 X_2 服从正态分布。）

11·3．设 $\{W_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是一个维纳过程，试证

对任意大的正数K，有

$$P\left(\bigcap_{t>0}\{|W_t|\leqslant K\}\right)=0$$

此习题说明：对维纳过程而言，永远在一个有界区域内运动的概率为0。

11·4. 令(X_n, Y_n)的特征函数

$$\varphi_n(u, v)\equiv \mathbf{E}\left(e^{i(uX_n+vY_n)}\right)$$
$$=\{q_1q_2+p_1e^{iu}+p_2e^{iv}+p_1p_2e^{i(u+v)}\}^n$$

$(n=1,2,\cdots, -\infty<u,v<\infty)$，其中$0<p_1<1$，$0<p_2<1$，$q_1=1-p_1$，$q_2=1-p_2$，再令

$$X_n^*=\frac{X_n-\mathbf{E}(X_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_n)}}\qquad Y_n^*=\frac{Y_n-\mathbf{E}(Y_n)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_n)}}$$

试求

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^*(u,v)$$

其中 $\varphi_n^*(u, v)$是(X_n^*, Y_n^*)的特征函数，即是

$$\varphi_n^*(u,v)=\mathbf{E}\left(e^{i(uX_n^*+vY_n^*)}\right)$$

（提示：先算出

$$\mathrm{E}(X_n)=\frac{1}{i}\left[\frac{\partial}{\partial u}\varphi_n(u,v)\right]_{(u,v)=(0,0)}$$

$$\mathrm{E}(Y_n)=\frac{1}{i}\left[\frac{\partial}{\partial v}\varphi_n(u,v)\right]_{(u,v)=(0,0)}$$

$$\mathrm{Var}(X_n)=\mathbf{E}(X_n^2)-\mathbf{E}(X_n)^2$$
$$=-\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi_n(u,v)\right]_{(u,v)=(0,0)}-\mathbf{E}(X_n)^2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y_n) &= \mathbf{E}(Y_n^2) - \mathbf{E}(Y_n)^2 \\ &= -\left[\frac{\partial^2}{\partial v^2}\varphi_n(u, v)\right]_{(u,v)=(0,0)} - \mathbf{E}(Y_n)^2\end{aligned}$$

然后计算 $\varphi_n^*(u,v)$，再对 $n\to\infty$ 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\ln\varphi_n^*(u,v)$$

11·5. 设 $\{X_t^{(\lambda)},\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，试证它是渐近正态过程（当 $\lambda\to\infty$ 时），即令

$$Y_t^{(\lambda)} = \frac{X_t^{(\lambda)} - \mathbf{E}(X_t)}{\sqrt{\mathrm{Var}X_t^{(\lambda)}}} = \frac{X_t^{(\lambda)} - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} \qquad (t\in[0,\ \infty))$$

则有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[\mathbf{E}\left(exp\left\{i\sum_{j=1}^{n} u_j Y_{t_j}^{(\lambda)}\right\}\right)\right.$$

$$\left. - exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\ \sum_{r=1}^{n} u_j\rho(X_{t_j}^{(\lambda)},\ \ X_{t_r}^{(\lambda)})u_r\right\}\right] = 0$$

其中

$$\rho(X_{t_j}^{(\lambda)},\ \ X_{t_r}^{(\lambda)}) = \frac{\mathrm{Cov}(X_{t_j}^{(\lambda)},\ \ X_{t_r}^{(\lambda)})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_{t_j}^{(\lambda)})\mathrm{Var}(X_{t_r}^{(\lambda)})}}$$

是 $X_{t_j}^{(\lambda)}$ 与 $X_{t_r}^{(\lambda)}$ 的相关系数。

（提示：由于 $\{X_t^{(\lambda)}\}$ 具有独立平稳增量，故当 $s<t$ 时有

$$\begin{aligned}&P(X_s^{(\lambda)}=j,\ \ X_t^{(\lambda)}=k) \\ =&P(X_s^{(\lambda)}=j,\ \ X_t^{(\lambda)}-X_s^{(\lambda)}=k-j) \\ =&P(X_s^{(\lambda)}=j)P(X_t^{(\lambda)}-X_s^{(\lambda)}=k-j)\end{aligned}$$

$$=\begin{cases}0 & \text{当 } j>k\\ e^{-\lambda s}\dfrac{(\lambda s)^j}{j!}e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{[\lambda(t-s)]^{k-j}}{(k-j)!} & \text{当 } j\leqslant k.\end{cases}$$

因此

$$\mathbf{E}(X_s^{(\lambda)}X_t^{(\lambda)})$$

$$=\sum_{0<j<k<\infty} jke^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^j}{j!}e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} ie^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^j}{j!}\sum_{k=0}^{\infty}(k+j)e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} je^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^j}{j!}(j+\lambda(t-s))$$

$$=\mathbf{E}([X_s^{(\lambda)}]^2)+\lambda(t-s)\mathbf{E}(X_s^{(\lambda)})$$

$$=\lambda s+(\lambda s)^2+\lambda(t-s)\lambda s$$

$$=\lambda s+\lambda^2 st$$

所以

$$\rho(X_{t_j}^{(\lambda)},\ X_{t_r}^{(\lambda)})=\frac{(\lambda t_j+\lambda^2 t_j t_r)-\lambda^2 t_j t_r}{\sqrt{\lambda t_j\cdot\lambda t_r}}$$

$$=\frac{t_j}{\sqrt{t_j t_r}}\qquad (\text{当 } 0<t_j<t_r)$$

再把特征函数

$$\mathbf{E}\left(exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}u_jY_{t_j}^{(\lambda)}\right\}\right)$$

取对数以后再按泰勒公式展开，再对 $\lambda\to\infty$ 取极限。）

11·6. 设 $\{W_t, t\in[0,\infty)\}$ 是一个维纳过程，其对应的参数 $\sigma^2=1$。令

$$X_n=\sum_{k=1}^{2^n}\left(W_{\frac{k}{2^n}}-W_{\frac{k-1}{2^n}}\right)^2 \quad n=1,2,\cdots$$

试证

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(|X_n-1|^2)=0$$

（提示：若Y服从标准正态分布，则 $\mathbf{E}(Y^4)=3$。）

§ 12 平稳过程

在本书的前十节中，我们所研究的随机过程，多半与马尔可夫过程有某种联系，甚至可以说多半是一些特殊的马尔可夫过程。在这一节中，我们将研究另一种模式的随机过程，这种随机过程的概率规律，不随时间之推移而变化，即所谓平稳过程。

定义 12·1. 设 $T\subset(-\infty, \infty)$，$\{X_t, t\in T\}$ 是一族随机变量（与以前一样，多数情况下，$T=(-\infty, \infty)$ 或 $[0, \infty)$，或 $\{0,1,2,\cdots\}$，或 $\{0, \pm1, \pm2,\cdots\}$），如果对任何正整数 n，任何 $\{t_1,\cdots, t_n\}\subset T$，$\{s+t_1, \cdots, s+t_n\}\subset T$，任何 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subset(-\infty,\infty)$，都有

$$P(X_{t_1}<x_1, \cdots, X_{t_n}<x_n)$$
$$=P(X_{s+t_1}<x_1, \cdots, X_{s+t_n}<x_n) \qquad (12\cdot1)$$

则称 $\{X_t, t\in T\}$ 是一个平稳过程。

(12·1) 正是说明，n 维随机变量 $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ 与把它平移 s 以后所得的 n 维随机变量 $(X_{s+t_1},\cdots, X_{s+t_n})$ 的联合分布函数是一样的。

例 12·1. 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一串相互独立具有公共分布的随机变量，则它是一个平稳过程。

例 12·2. 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一个时齐的以 $E=\{0, 1, 2, \cdots\}$ 为状态空间的马尔可夫链，且满足

$$P(X_n=k)=P(X_0=k) \quad (k\in E, n=0, 1, 2,\cdots) \quad (12\cdot2)$$

则 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一个平稳过程。

证. 设 $P^{(v)}=(p_{ij}^{(v)}, i,j\in E)$ 是此马尔可夫链的 v 步转移矩阵，由马尔可夫性及（12·2）得知：对任何正整数 n，任何非负整数 $t_1,\cdots, t_n$ 及 s，任何 $\{i_1,\cdots, i_n\}\subset E$，均有

$$
\begin{aligned}
&P(X_{s+t_1}=i_1, \cdots, X_{s+t_n}=i_n)\\
&=P(X_{s+t_1}=i_1)p_{i_1,i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1},i_n}^{(t_n-t_{n-1})}\\
&=P(X_{t_1}=i_1)p_{i_1,i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1},i_n}^{(t_n-t_{n-1})}\\
&=P(X_{t_1}=i_1, \cdots, X_{t_n}=i_n)
\end{aligned}
$$

此即 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一个平稳过程。

我们知道，随机变量的矩（例如期望、方差…等等）虽不能完全决定随机变量的概率规律（分布函数），但却对该随机变量的某些概率特性提供了重要信息。而且对某些重要的随机变量而言，只要它的某些矩知道了，那么该随机变量的分布函数也就随之知道了。例如正态随机变量的分布函数由其期望与方差决定，泊松随机变量的分布函数由其期望所决定。基于此，对平稳过程，我们也不一定研究满足(12·1)的平稳过程，转而研究一类“其某些矩不随时间推移而变化”的随机过程。这一类随机过程就是下面定义的所谓“宽平稳过程”。

定义 12·2. 设 $\{X_t, t\in T\}$ 是一族随机变量，$\mathbf{E}(|X_t|^2)<\infty$，$(t\in T)$。令

$$m(t)=\mathbf{E}(X_t), \quad (t\in T)$$

是其期望函数（因为一般而言，$m(t)$ 随 t 的变化而变化），

$$K(s,t)=\mathrm{Cov}(X_s,X_t),\quad (s,t\in T)$$

其协方差函数。如果

$$K(s,t)=K(u+s,u+t),(s,t,s+u,t+u\in T) \quad (12\cdot3)$$

则称 $\{X_t,\ t\in T\}$ 是一个宽平稳过程。对宽平稳过程而言，由于其协方差函数 $K(s,t)$ 满足上述条件，所以总有一元函数 $R(u)$，使

$$R(u)=K(s,s+u)=\mathrm{Cov}(X_s,X_{s+u}),\quad (s,u,s+u\in T)$$

我们称 $R(u)$ 为宽平稳过程的相关函数。

显然，若 $\{X_t,\ t\in T\}$ 是平稳过程，而且 $\mathbf{E}(|X_t|^2)<\infty$，$(t\in T)$，则 $\{X_t,\ t\in T\}$ 必为宽平稳过程。

注意：平稳过程的条件（12·1）和宽平稳过程的条件（12·3）并不是对一切（或者大多数）随机过程都满足的，就以我们最熟悉的泊松过程和维纳过程，（12·3）也未必成立（更不用说（12·1）了）。

例 12·3. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是以 λ 为强度的泊松过程。则

$$m(t)=\mathbf{E}(X_t)=\lambda t$$

$$K(s,t)=\mathrm{Cov}(X_s,\ X_t)=\lambda\min(s,t)$$

（此计算请参看习题11·5。）

例 12·4. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是以 σ^2 为参数的维纳过程。则

$$m(t)=\mathbf{E}(X_t)=0$$

$$\mathrm{Var}(X_t)=\sigma^2 t$$

而当 $s<t$ 时，由 $\{X_t\}$ 具有独立增量得

$$\mathrm{Cov}(X_s,\ X_t)=\mathrm{Cov}(X_s,\ X_t-X_s+X_s)$$
$$=\mathrm{Cov}(X_s,\ X_t-X_s)+\mathrm{Cov}(X_s,\ X_s)$$

$$=\mathrm{Cov}(X_s,\ X_s)$$
$$=\mathrm{Var}(X_s)=s\sigma^2$$

所以

$$K(s,t)=\sigma^2\ \min(s,t)$$

例 12•5. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 具有独立增量，且 $\mathbf{E}(|X_t|^2)<\infty$，则

$$K(s,t)=\mathrm{Cov}(X_s,X_t)=\mathrm{Var}(X_{s\wedge t})$$

其中 $s\wedge t=\min(s,t)$

此结论在例 12•4 中已证。因为这并不要求 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是维纳过程，只要求它具有独立增量。

例 12•6. 泊松过程的增量过程。设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是一个强度为 λ 的泊松过程，a 是一个正的常数。令

$$Y_t=X_{a+t}-X_t \qquad t\in[0,\infty) \tag{12•4}$$

则

$$m(t)\equiv\mathbf{E}(Y_t)=\mathbf{E}(X_{a+t})-\mathbf{E}(X_t)=a\lambda \tag{12•5}$$

$$K(s,t)\equiv\mathrm{Cov}(Y_s,\ Y_t)$$
$$=\begin{cases}\lambda\{a-|t-s|\} & 当\ |t-s|\leqslant a\\ 0 & 当\ |t-s|>a\end{cases} \tag{12•6}$$

证. (12•5) 乃属显然。下面证明 (12•6)。

先设 $s\leqslant t$ 分两种情况

(A) $t\leqslant s+a$

$$K(s,t)=\mathrm{Cov}(X_{a+s}-X_s,\ X_{a+t}-X_t)$$
$$=\mathrm{Cov}(X_{a+s}-X_t+X_t-X_s,\ X_{a+t}-X_t)$$
$$=\mathrm{Cov}(X_{a+s}-X_t,\ X_{a+t}-X_t) \tag{12•7}$$

再注意 $X_{a+t}-X_t=(X_{a+t}-X_{a+s})-(X_{a+s}-X_t)$，并注意 $(X_{a+t}-X_{a+s})$ 与 $(X_{a+s}-X_t)$ 独立，则由 (12•7) 得

$$K(s,t)=\operatorname{Var}(X_{a+s}-X_t)=\operatorname{Var}(X_{a+s-t})$$
$$=\lambda(a+s-t) \tag{12·8}$$

(B) $t>s+a$ 则由 $\{X_t\}$ 具有独立增量得

$$K(s,t)=\operatorname{Cov}(X_{a+s}-X_s,\ X_{a+t}-X_t)=0 \tag{12·9}$$

总之当 $s\leqslant t$ 时有

$$K(s,t)=\begin{cases}\lambda(a+s-t) & \text{当 } t\leqslant s+a\\ 0 & \text{当 } t>s+a\end{cases}$$

若注意 $K(s,t)=K(t,s)$，则不论 s 与 t 的大小次序如何，总有

$$K(s,t)=\begin{cases}\lambda(a-|t-s|) & \text{当 } |t-s|\leqslant a\\ 0 & \text{当 } |t-s|>a\end{cases}$$

(12·5)、(12·6) 说明：泊松过程的增量过程是宽平稳过程，尽管泊松过程未必是宽平稳过程。

定理 12·1. 设 $\{X_t,\ t\in T\}$ 是一个宽平稳过程，$R(u)$ 是其相关函数，令 $\mathbf{E}(X_t)=m(t)$，则

（1） $R(0)\geqslant 0$；

（2） $R(0)=0\Leftrightarrow P(X_t=m_t)=1$，（对$t\in T$）；

（3） $|R(u)|\leqslant R(0)$，$(u\in T)$；

（4） $R(u)$ 是非负定函数，即是对任意正整数 n，任意实数 a_1，…，a_n，任意 $\{t_1,\ \cdots,\ t_n\}\subset T$，都有

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R(t_j-t_k)a_j a_k\geqslant 0$$

证（1）—（3）是显然的。下面证明（4）

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R(t_j-t_k)a_j a_k$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}([X_{t_j}-\mathbf{E}(X_{t_j})][X_{t_k}-\mathbf{E}(X_{t_k})])a_j a_k$$

$$=\mathbf{E}\left(\left\{\sum_{j=1}^{n}a_j[X_{t_j}-\mathbf{E}(X_{t_j})]\right\}^2\right)\geqslant 0$$

在 § 11 的定义11·5和定义11·6中，我们曾经定义过随机过程的均方收敛及均方收敛意义下的连续性，可微性及积分。在这一节中，我们将进一步用到这些概念。

定理12·2. 设 $\{X_t, t\in(-\infty,\infty)\}$ 是满足 $\mathbf{E}(X_t)\equiv m_0$ 的宽平稳过程，则下列陈述等价

（1） $R(u)$ 在 0 连续；

（2） $\{X_t\}$ 在 0 均方连续；

（3） $\{X_t\}$ 均方连续；

（4） $R(u)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续。

证。因为

$$\mathbf{E}(|X_{t+u}-X_t|^2)=\mathbf{E}(|[X_{t+u}-\mathbf{E}(X_{t+u})]-[X_t-\mathbf{E}(X_t)]|^2)$$

$$=2R(0)-R(u)-R(-u)$$

$$=2|R(0)-R(u)|$$

所以（1）⇒（2）和（3）

（3）⇒（4）。用西瓦兹（Schwarz）不等式有

$$|R(t+u)-R(t)|=|\mathbf{E}([X_{t+u}-X_t][X_0-m_0])|$$

$$\leqslant\sqrt{\mathbf{E}(|X_{t+u}-X_t|^2)}\sqrt{R(0)}\qquad t\in(-\infty,\infty)$$

所以（3）⇒（4）。

（2）⇒（1）。在（3）⇒（4）的证明中取 $t=0$ 即得（2）⇒（1）。

“（4）⇒（1）”显然成立。定理证毕。

在实际问题往往需要根据随机过程 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 的一次有限的观察纪录 $\{X_0, X_1,\cdots, X_T\}$，来估计 $\{X_n, n=0, 1, 2,\cdots\}$ 的各种矩，例如说期望函数 $\mathbf{E}(X_n)\equiv m_n$，协方差函数 $K(j, k)\equiv\mathbf{E}((X_j-m_j)(X_k-m_k))$ 这类问题即是概率论中的遍历性理论。我们先从宽平稳过程的遍历性理论开始。

定理 12·3. 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一串随机变量，其协方差函数

$$K(j,k)=\mathrm{Cov}(X_j, X_k)\quad (j, k=0, 1, 2, \cdots)$$

有界，即是存在一个正数 K_0，使

$$\mathrm{Var}(X_n)=K(n,n)\leqslant K_0\quad (n=0,1,2,\cdots)\tag{12·10}$$

令

$$M_t\equiv\sum_{n=1}^{t}\frac{1}{t}X_n\tag{12·11}$$

是 t 阶样本均值（即样本大小为 t 的样本均值），再令

$$C_t\equiv\mathrm{Cov}(X_t, M_t)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}K(s,t)\tag{12·12}$$

是 t 阶样本均值与第 t 次观察的协方差。则下列陈述等价

（1） $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{Var}(M_t)=0$； (12·13)

（2） $\lim\limits_{t\to\infty}C_t=0$ (12·14)

特别地，若 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是宽平稳过程，$R(n)$ 是其相关函数（$n=0, 1, 2, \cdots$），则

$$C_t=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}K(s,t)=\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}R(t-s)$$

$$=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{t-1}R(n) \tag{12·15}$$

从而定理的结论变为

$$\text{“}\lim_{t\to\infty}\mathrm{Var}(M_t)=0\Leftrightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{t-1}R(n)=0\text{”}$$

而

$$\mathrm{Var}(M_t)=\mathbf{E}\left(\left|\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{t}[X_n-\mathbf{E}(X_n)]\right|^2\right)$$

所以，若 $\mathbf{E}(X_n)\equiv m_0$，$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，则

$$\mathrm{Var}(M_t)=\mathbf{E}\left(\left|\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{t}X_n-m_0\right|^2\right)$$

从而定理 12·3 变为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{t}X_n=m_0,\quad[L^2]$$

的充要条件为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{t-1}R(n)=0$$

亦即我们得到下面的

系 1. 若 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 为宽平稳过程，$\mathrm{Var}(X_n)\leqslant K_0$，$\mathbf{E}(X_n)=m_0$，　$(n=0, 1, 2, \cdots)$，令 $R(n)=\mathrm{Cov}(X_m, X_{m+n})$，则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{t}X_n=m_0, \ [L^2] \qquad (12\cdot16)$$

的充要条件为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{t-1}R(n)=0 \qquad (12\cdot17)$$

（12•6）的直观意义正是：过程的期望（均值）用样本的均值来逼近。而系1说明，这种逼近成立的充要条件是（12•17），而（12•17）的意义是相关函数 $R(n)$ 平均地趋于0（当 $n\to\infty$时。）。显然

$$\lim_{t\to\infty}R(t)=0$$

蕴含了（12•17）成立。

现在我们来证明定理12•3

（1）⇒（2）设 （12•13）成立。由西瓦兹不等式有

$$|C_t|^2\leqslant\mathrm{Var}(X_t)\mathrm{Var}(M_t)\leqslant K_0\mathrm{Var}(M_t)$$

故由（12•13）立即可得（12•14）

（2）⇒（1）　设（12•14）成立。

因为

$$t^2\mathrm{Var}(M_t)=\sum_{k=1}^{t}\mathrm{Var}(X_k)$$

$$+2\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{k-1}\mathrm{Cov}(X_j, X_k)$$

$$=2\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Cov}(X_j, X_k)-\sum_{k=1}^{t}\mathrm{Var}(X_k)$$

$$=2\sum_{k=1}^{t}kC_k-\sum_{k=1}^{t}\mathrm{Var}(X_k)$$

即是

$$0\leqslant\mathrm{Var}(M_t)=\frac{2}{t^2}\sum_{k=1}^{t}kC_k-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{t}\mathrm{Var}(X_k) \tag{12·18}$$

若能证

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{t}kC_k=0 \tag{12·19}$$

则由（12·18）、（12·19）立得（12·13）下面我们来证明（12·19）事实上，对任何 $t>T>0$，

$$\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{t}kC_k\leqslant\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{T}|kC_k|+\sup_{k>T}|C_k|$$

在上式中先令 $t\to\infty$，次令$T\to\infty$并注意（12·14）成立，即发现（12·19）成立。定理证毕。

下面我们研究时间参数集合非离散的随机过程的遍历性理论。这需要关于随和过程的积分的概念。（其定义可参看定义11·6）。

定理 12·4. 设 $\{X_t,\ t\in(\alpha,\ \beta)\}$ 是一个随机过程，$E(|X_t|^2)<\infty$，$(t\in(\alpha,\ \beta))$，α 可为实数亦可为 $-\infty$，β 可为实数亦可为 $+\infty$。令

$$B(s,t)=\mathbf{E}(X_sX_t)\qquad s,t\in(\alpha,\beta)$$

任取 $\alpha<a<b<\beta$，则 $\{X_t\}$ 在 $[a,b)$ 上均方可积的充要条件是：$B(s,\ t)$ 作为 s 和 t 的二元实变实值函数在矩形 $[a,b)\times[a,b)$ 上黎曼（Riemann）可积。这时还有

（1）$$\mathbf{E}\left(\int_{[a,b)}X_tdt\right)=\int_a^b\mathbf{E}(X_t)dt \qquad (12\cdot20)$$

（2）$$\mathbf{E}\left(\left|\int_{[a,b)}X_t\,dt\right|^2\right)$$
$$=\mathbf{E}\left(\int_{[a,b)}\int_{[a,b)}X_sX_tdsdt\right)$$
$$=\int_{[a,b)}\int_{[a,b)}\mathbf{E}(X_sX_t)dsdt \qquad (12\cdot21)$$

（3）$$\mathrm{Var}\left(\int_{[a,b)}X_tdt\right)$$
$$=\int_{[a,b)}\int_{[a,b)}\mathrm{Cov}(X_s,X_t)dsdt \qquad (12\cdot22)$$

注意：由（12·20）、（12·21）立即可得（12·22）

$$\mathrm{Var}\left(\int_{[a,b)}X_tdt\right)$$
$$=\mathbf{E}\left(\left|\int_{[a,b)}X_tdt\right|^2\right)-\left[\mathbf{E}\left(\int_{[a,b)}X_tdt\right)\right]^2$$
$$=\int_{[a,b)}\int_{[a,b)}\mathbf{E}(X_sX_t)dt$$
$$-\int_{[a,b)}\int_{[a,b)}\mathbf{E}(X_s)\mathbf{E}(X_t)dsdt$$
$$=\int_{[a,b)}\int_{[a,b)}\mathrm{Cov}(X_s,X_t)dsdt$$

另外，由于 $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)=\mathrm{Cov}(X_t, X_s)$ 是 s 和 t 的对称函数，所以（12·22）还可写为

$$\mathrm{Var}\left(\int_{[a,b)} X_t dt\right)$$

$$=2\int_{[a,b)} dt\int_{[a,t)} ds[\mathrm{Cov}(X_s, X_t)] \qquad (12\cdot 22)$$

定理12·4的证明已超出本书的要求，有进一步研究兴趣的读者，请参看文献[4]定理 20·1。

定理 12·5．设 $\{X_t,\ t\in(-\infty,\infty)\}$ 是一个均方连续的宽平稳过程，$\mathbf{E}(X_t)=m_t\equiv m_0$，$(t\in[0,\infty))$，

$R(u)=\mathrm{Cov}(X_t,\ X_{t+u})$，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{[0,T)} X_t dt=m_0, \quad [L^2] \qquad (12\cdot 23)$$

的充要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{[0,T)} R(u)du=0 \qquad (12\cdot 24)$$

此定理系定理12·3在连续时间参数场合下的类似定理。

由于假定了 $\{X_t\}$ 均方连续，故由定理12·2得知 $R(u)$ 是连续函数，再用定理12·4，$\{X_t\}$ 在任何有界区间 $[a,b)$ 上均方可积，即是

$$\frac{1}{T}\int_{[a,b)} X_t dt$$

是一个确定的二阶矩有穷的随机变量。

定理 12·5 的证明请参看文献[4]定理 20·2。

例 12·7．维纳过程的积分过程。设 $\{W_t,\ t\in[0,\infty)\}$ 是一个参数为 σ^2 的维纳过程，令

$$X_t=\int_{[0,t)} W_s ds \quad (t\in[0,\infty)) \qquad (12\cdot 25)$$

（由定理 12·4. $\{W_t\}$ 在任意有界区间 $[a,b)$ 上都是均方可积的，所以（12·25）有定义。）则称 $\{X_t, \ t\in[0,\infty)\}$ 是维纳过程的积分过程。

下面我们来计算 $\{X_t\}$ 的期望函数和协方差函数。令

$$m_W(t)=\mathbf{E}(W_t) \quad m_X(t)=\mathbf{E}(X_t)$$

$$K_W(s,t)=\mathrm{Cov}(W_s,W_t)$$

$$K_X(s,t)=\mathrm{Cov}(X_s,X_t)$$

由定理12·4即得

$$m_X(t)\equiv m_W(t)\equiv 0 \tag{12·26}$$

$$\mathbf{E}(X_t^2)=\mathrm{Var}(X_t)=\int_{[0,t)}dv\int_{[0,t)}duK_W(u,v)$$

$$=2\int_{[0,t)}dv\int_{[0,v)}du\,K_W(u,v)$$

$$=\int_{[0,t)}dv\int_{[0,v)}du(2\sigma^2u)$$

$$=\sigma^2\int_{[0,t)}v^2dv=\sigma^2t^3/3 \tag{12·27}$$

当 $t>s\geqslant 0$ 时，有

$$X_t=X_s+\int_{[s,t)}\{W_v-W_s\}dv+(t-s)W_s \tag{12·28}$$

而 $\{W_t\}$ 具有独立增量，所以定义 11·6 有

$$K_X(s,t)=\mathbf{E}(X_sX_t)$$

$$=\mathbf{E}(X_s^2)+(t-s)\mathbf{E}(X_sW_s)$$

$$+\mathbf{E}\left(\int_{[s,t)}\{X_sW_v-X_sW_s\}dv\right)$$

$$=\mathbf{E}(X_s^2)+(t-s)\mathbf{E}(X_sW_s) \tag{12·29}$$

但是，

$$\mathbf{E}(X_sW_s)$$

$$=\mathbf{E}\left(W_s\int_{[0,s)}W_u du\right)$$

$$=\int_{[0,s)}\mathbf{E}(W_sW_u)du$$

$$=\int_{[0,s)}K_W(s,u)du=\int_{[0,s)}\sigma^2 u du$$

$$=\frac{\sigma^2 s^2}{2} \tag{12·30}$$

以 (12·27) 和 (12·30) 代入 (12·29) 得

$$K_X(s,t)=\frac{\sigma^2 s^3}{3}-(t-s)\frac{\sigma^2 s^2}{2}$$

$$=\frac{\sigma^2 s^2}{6}(3t-s)\quad (t>s\geqslant 0) \tag{12·31}$$

定理12·6. 设随机过程 $\{X_t,\ a\leqslant t\leqslant b\}$ 是可导的，$\{X'_t,\ t\in[a,b]\}$ 是其导过程。令

$$\sigma(t)=\{\mathbf{E}(|X_t|^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_1(t)=\{\mathbf{E}(|X'_t|^2)\}^{\frac{1}{2}} \tag{12·32}$$

则

$$\mathbf{E}\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}X_t^2\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\sigma^2(a)+\sigma^2(b)\right)+\int_{[a,b)}\sigma(t)\sigma_1(t)dt \tag{12·33}$$

因此，由切比雪夫（чебыщев）不等式有

$$P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X_t|>\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{E}\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}X_t^2\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2\varepsilon^2}(\sigma^2(a)+\sigma^2(b))+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{[a,b)}\sigma(t)\sigma_1(t)dt \tag{12·34}$$

或者

$$P(\inf_{a<t<b}|X_t-m(t)|\leqslant\varepsilon)$$

$$\geqslant 1-\left[\frac{1}{2\varepsilon^2}(\mathrm{Var}(X_a)+\mathrm{Var}(X_b))\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{[a,b)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_t)\mathrm{Var}(X'_t)}dt\right] \qquad (12\cdot35)$$

(其中 $\varepsilon>0$, $m(t)=\mathbf{E}(X_t)$) 。

附注：可以证明，若 $\{X_t, t\in T\}$ 的二阶矩有限且满足：$m(t)$ 可导；$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}K(s, t)$ 存在且连续，($m(t)\equiv\mathbf{E}(X_t)$，$K(s,t)\equiv\mathrm{Cov}(X_s,X_t)$，) 则 $\{X_t\}$ 可导。若 $\{X_t, t\in T\}$ 是宽平稳过程，$m(t)\equiv m_0$，则它可导的充分必要条件是其相关函数 $R(u)$ 二阶可导，而且可导的宽平稳过程的导过程也是宽平稳过程，其相关函数为 $R_{X'}(u)=-R''(u)$，($R(u)$ 是原过程的相关函数）。

现在我们来证明定理 12·6。因为

$$X_t^2=X_a^2+2\int_{[a,t)}X'_uX_udu$$

$$=X_b^2-2\int_{[t,b)}X'_uX_udu \quad (a\leqslant t\leqslant b) \qquad (12\cdot36)$$

所以

$$2X_t^2=X_a^2+X_b^2+2\int_{[a,t)}X'_uX_udu$$

$$-2\int_{[t,b)}X'_uX_udu$$

$$\leqslant X_a^2+X_b^2+2\int_{[a,b)}|X'_uX_u|du \quad (a\leqslant t\leqslant b) \quad (12\cdot37)$$

因此

$$\mathbf{E}(\sup_{a<t<b} X_t^2) \leqslant \frac{1}{2}\{\mathbf{E}(X_a^2)+\mathbf{E}(X_b^2)\}$$

$$+\int_{[a,b)} \mathbf{E}(|X'_u X_u|)du$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\{\mathbf{E}(X_a^2)+\mathbf{E}(X_b^2)\}$$

$$+\int_{[a,b)} \{\mathbf{E}(|X'_u|^2)\mathbf{E}(|X_u|^2)\}^{\frac{1}{2}}du \qquad (12\cdot38)$$

定理证毕。

例 12·8。(续例 12·6)。设 $\{Y_t, t\in[0,\infty)\}$ 是如(12·4)所定义的强度为 λ 的泊松过程 $\{X_t, t\in[0,\infty)\}$ 的增量过程，如例 12·6所证，$\{Y_t\}$ 是一个宽平稳过程，其期望函数与相关函数分别为

$$m(t)=\lambda a$$

$$R(u)=\begin{cases}0 & u>a\\ \lambda(a-u) & u\leqslant a\end{cases}$$

其中 a 是固定的正数。

显然 $m(t)$、$R(u)$ 都是在 $[0, a)$ 和 (a, ∞) 上任意阶可导，所以 $\{Y_t\}$ 在 $[0, a)$ 和 (a, ∞) 上可导。因此由定理 12·6得（取 $0<b<a$）

$$\mathbf{E}(\sup_{0<t<b} Y_t^2) \leqslant \frac{1}{2}\{\mathbf{E}(Y_0^2)+\mathbf{E}(Y_b^2)\}$$

$$+\int_{[0,b)} \{\mathbf{E}(|Y'_u|^2)\,\mathbf{E}(|Y_u|^2)\}^{\frac{1}{2}}du \qquad (12\cdot39)$$

而 $\mathbf{E}(Y'_u)=\dfrac{d}{du}\mathbf{E}(Y_u)\equiv 0$

$$\mathbf{E}(Y_u^2)\equiv R(0)+(\lambda a)^2=\lambda a+(\lambda a)^2 \quad (u\in[0,a])$$

$$(12\cdot40)$$

$$\mathbf{E}(|Y'_u|^2)=-R''(0)+\mathbf{E}(Y'_t)^2=0 \tag{12·41}$$

以（12·40)、(12·41）代入（12·39）得

$$\mathbf{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant b} Y_t^2)\leqslant\lambda a+(\lambda a)^2 \tag{12·42}$$

作为本节的最后一部份，简单介绍一下平稳过程的一个不等式及大数定律。

定理 12·7. 设 $\{X_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 是一个平稳过程，令

$$M_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=0}^{k-1}X_i \qquad N_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sum_{i=1}^{k}X_i$$

$$Z_n=\max\{M_n,\ 0\} \qquad Y_n=\max\{N_n,0\}$$

$$M=\sup_{n\geqslant 1}\sum_{i=0}^{n-1}X_i \qquad J_n=\begin{cases}1 & \text{当 } Z_n>0\\ 0 & \text{当 } Z_n\leqslant 0\end{cases}$$

$$I_n=\begin{cases}1 & \text{当 } M_n>0\\ 0 & \text{当 } M_n\leqslant 0\end{cases} \qquad I=\begin{cases}1 & \text{当 } M>0\\ 0 & \text{当 } M\leqslant 0\end{cases}$$

则

（1）$\mathbf{E}(I_nX_0)\geqslant 0$，$(n\geqslant 1)$，　　(12·43)

（2）$\mathbf{E}(IX_0)\geqslant 0$。　　(12·44)

证　由于 $\{X_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 是平稳过程，所以 M_n 与N_n的分布函数相同，即

$$P(M_n<\lambda)\equiv P(N_n<\lambda) \tag{12·45}$$

又因为

$$\{Z_n>0\}=\{M_n>0\} \tag{12·46}$$

$$\{M_n>0\}\subset\{Z_n=M_n\} \tag{12·47}$$

$$\{M_n\leqslant 0\}\subset\{Z_n=0\} \tag{12·48}$$

所以由（12·45）—（12·48）得

当 $\lambda>0$ 时：

$$P(Z_n<\lambda)=P(Z_n>0,\ Z_n<\lambda)+P(Z_n\leqslant 0, Z_n<\lambda)$$
$$=P(M_n>0,\ Z_n<\lambda)+P(M_n\leqslant 0,\ Z_n<\lambda)$$
$$=P(M_n>0,\ M_n<\lambda)+P(M_n\leqslant 0)$$
$$=P(M_n<\lambda)=P(N_n<\lambda)$$
$$=P(Y_n<\lambda) \tag{12·49}$$

当 $\lambda\leqslant 0$ 时：

$$P(Z_n<\lambda)=0=P(Y_n<\lambda) \tag{12·50}$$

总之恒有

$$P(Y_n<\lambda)=P(Z_n<\lambda)\quad \lambda\in(-\infty,\infty) \tag{12·51}$$

又因为

$$X_0+Y_n=\max\{X_0,\ X_0+N_n\}$$
$$=\max\{X_0,\ M_{n+1}\}$$
$$=M_{n+1}\geqslant M_n \tag{12·52}$$

所以

$$X_0\geqslant M_n-Y_n=Z_n-Y_n\quad (\text{当 } J_n=1 \text{时，即} Z_n>0\text{时}) \tag{12·53}$$

由（12·53）及（12·46）—（12·48）得

$$\mathbf{E}(I_nX_0)=\mathbf{E}(J_nX_0)\geqslant\mathbf{E}(J_n[Z_n-Y_n]) \tag{12·54}$$

而由Y_n非负得知 $J_n=0$（即 $Z_n\leqslant 0$）时有

$$Z_n-Y_n\leqslant 0 \tag{12·55}$$

由（12·54）、（12·55）及（12·51）得

$$\mathbf{E}(I_nX_0)\geqslant\mathbf{E}(J_n[Z_n-Y_n])+\mathbf{E}([1-J_n][Z_n-Y_n])$$
$$=\mathbf{E}(Z_n-Y_n)=0$$

此即（1）得证。在（1）中对 $n\to\infty$取极限即得（2）。定理得证。

定理12·8． 在定理 12·7 的符号及条件下，再令 λ 为任一实数，

$$M_n^* = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} X_i$$

$$M^* = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i$$

$$A_n^*(\lambda) = \{M_n^* > \lambda\}, \quad I_n^*(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{当 } M_n^* > \lambda \\ 0 & \text{当 } M_n^* \leq \lambda \end{cases}$$

$$A^*(\lambda) = \{M^* > \lambda\}, \quad I^*(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{当 } M^* > \lambda \\ 0 & \text{当 } M^* \leq \lambda \end{cases}$$

则

（1） $\mathbf{E}(I_n^*(\lambda)X_0) \geq \lambda P(A_n^*(\lambda))$ （12·56）

（2） $\mathbf{E}(I^*(\lambda)X_0) \geq \lambda P(A^*(\lambda))$ （12·57）

证。令

$$X_n^{(\lambda)} = X_n - \lambda \quad (n \geq 0)$$

则 $\{X_n^{(\lambda)}, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 亦为一个平稳过程。因此，把（12·43）、（12·44）中的 X_n 换成 $X_n^{(\lambda)}$ 后，仍有（12·43）、（12·44）。而此时的（12·43）、（12·44）就是（12·56）、（12·57）。

定理12·9． 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一个平稳过程，$\mathbf{E}(|X_n|) < \infty$，则存在随机变量 Y，$\mathbf{E}(|Y|) < \infty$，使得：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X_i = Y \quad \text{（概率为 1 地）。} \quad (12·58)$$

13 第十台、应用插页

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}X_i=Y \quad [L^1] \tag{12·59}$$

(所谓随机变量序列 $\{Y_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 当 $n\to\infty$时概率为1地收敛到Y，意即

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\left\{|Y_n-Y|<\frac{1}{m}\right\}\right)=1$$

而所谓随机变量序列 $\{Y_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 当 $n\to\infty$ 时$[L^1]$收敛到Y，意即

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}(|Y_n-Y|)=0)$$

而当什么条件下，进一步有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}X_i=\mathbf{E}(X_0) \quad (\text{概率为1地}) \tag{12·60}$$

呢？这要求 $\{X_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots\}$ 满足“遍历性”条件，而遍历性条件的含义是什么？这已超出本书的范围，故在此不再深论了。

即使是定理 12·9 的证明，也须要用到较多的数学工具，在此不便证明。

习　　题

12·1. 设 $X_t=\xi+\eta t$，$(t\in[0,\ \infty))$，其中ξ，η是相互独立且均服从 $[0,\ 1]$ 区间上的均匀分布，试求 $m(t)\equiv\mathbf{E}(X_t)$ 及 $K(s,t)\equiv\mathrm{Cov}(X_s,\ X_t)$。

12·2. 设 $X_t=\xi\cos\omega t+\eta\sin\omega t$，$(t\in[0,\ \infty))$，其

中ξ与η是不相关的随机变量，$\mathbf{E}(\xi)=\mathbf{E}(\eta)=0$，$\mathrm{Var}(\xi)=\mathrm{Var}(\eta)=\sigma^2$，$\omega$ 是一个正数，试求 $m(t)\equiv\mathbf{E}(X_t)$ 及 $K(s,t)\equiv\mathrm{Cov}(X_s,\ X_t)$。

12·3. 设 $\{W_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$是一个以$\sigma^2$为参数的维纳过程，令$a$为一固定的正数，

$$X_t=W_{a+t}-W_t\quad t\in[0,\ \infty)$$

即 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是维纳过程的增量过程。试求$m(t)\equiv\mathbf{E}(X_t)$ 及 $K(s,t)\equiv\mathrm{Cov}(X_s,X_t)$。

12·4. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$ 是强度为λ的泊松过程，令

$$M_T=\frac{1}{T}\int_{[0,T)}X_t\,dt$$

试求 $\mathbf{E}(M_T)$ 和 $\mathrm{Var}(M_T)$。

12·5. 若 $\{X_t,\ t\in[0,\ \infty)\}$是 (12·25) 中所定义的维纳过程的积分过程，试求习题 12·4 中的类似的两个量。

12·6. 试证维纳过程是不可导的。

12·7. 设 $\{X_n,\ n=0,1,2,\cdots\}$、$\{Y_m,\ m=0,1,2,\cdots\}$是两串二阶矩有限的随机变量，且

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X,\ [L^2]$$

$$\lim_{n\to\infty}Y_m=Y,\ [L^2]$$

证明

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\mathbf{E}(Y_mX_n)=\mathbf{E}(YX)$$

12·8. 设 $\{X_t,\ t\in[0,\infty)\}$是宽平稳过程，$R(u)$ 是其相关函数，$m(t)\equiv\mathbf{E}(X_t)\equiv m_0$。若 $\{X_t\}$ 可导，试证：$P(u)$ 二阶可导，且 $\{X_t\}$ 的导过程 $\{X'_t\}$ 的期望函数恒

为 0，$\{X'_t\}$的相关函数为$-R''(u)$。

（提示：用习题 12·7. 有

$$\frac{R(u-h)-R(u)}{h}=\mathbf{E}\left(\frac{(X_{s+u}-m_0)(X_{s+h}-X_s)}{h}\right)$$

$$\xrightarrow{h\to 0}\mathbf{E}((X_{s+u}-m_0)X'_s)$$

亦即

$$-R'(u)=\mathbf{E}((X_{s+u}-m_0)X'_s) \qquad (12\cdot 61)$$

再一次应用习题 12·7 及（12·61）式得

$$\frac{-R'(u+h^*)+R'(u)}{h^*}$$

$$=\mathbf{E}\left(\frac{[(X_{s+u+h^*}-m_0)-(X_{s+u}-m_0)]X'_s}{h^*}\right)$$

$$\xrightarrow{h^*\to 0}\mathbf{E}(X'_{s+u}X'_s)。）$$

§ 13 鞅 过 程

定义 13·1. 称随机过程 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个上鞅，如果它满足 $\mathbf{E}(|X_n|)<\infty$，$(n\geqslant 0)$，及

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\leqslant X_n \quad (n\geqslant 0) \tag{13·1}$$

仿之，若 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 满足

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n, X_{n-1},\cdots,X_0)\geqslant X_n \quad (n\geqslant 0) \tag{13·2}$$

则称 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为下鞅。

如果 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 既是上鞅，又是下鞅，即是它满足

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n, X_{n-1},\cdots,X_0)=X_n \quad (n\geqslant 0) \tag{13·3}$$

则称 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是鞅。

例 13·1. 设 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是整数格子点上的贝努利随机徘徊，即它是一个以$\mathbf{E}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为状态空间的时齐的马尔可夫链，它的转移矩阵 $P=(p_{i,j}, i,j\in E)$ 满足

$$p_{i,j}=\begin{cases} p_i & 当\ j=i+1 \\ q_i & 当\ j=i-1 \\ 0 & 当\ |j-i|>1 \end{cases}$$

$p_i\equiv p$，$q_i\equiv q$，$0<p<1$，$p+q=1$。

则

（1）$\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是下鞅的充要条件是 $p \geqslant q$;

（2）$\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是上鞅的充要条件是 $p \leqslant q$;

（3）$\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是鞅的充要条件是 $p=q$。

证　由贝努利随机徘徊的定义可知

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n \quad (n \geqslant 1)$$

$\{\xi_n, n=1, 2, \cdots\}$ 相互独立，具有公共分布

$$P(\xi_n=1)=p, \ P(\xi_n=-1)=q, \ (n \geqslant 1),$$

$\{\xi_n\}$ 与 X_0 独立。

所以由 X_n 的定义，，ξ_{n+1} 与 $\{X_0, X_1, \cdots, X_n\}$ 独立可得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0) \\
&= \mathbf{E}(\xi_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0) \\
&\quad + \mathbf{E}(X_n | X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0) \\
&= \mathbf{E}(\xi_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0) \\
&\quad + X_n \\
&= \mathbf{E}(\xi_{n+1}) + X_n \\
&= p - q + X_n
\end{aligned}$$

由上式立即可得

$$\text{“}\mathbf{E}(X_{n+1} | X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0) \geqslant X_n \Leftrightarrow p \geqslant q\text{”}$$

故由下鞅、上鞅及鞅的定义得：

（1）$\{X_n\}$ 是下鞅的充要条件是 $p \geqslant q$;

（2）$\{X_n\}$ 是上鞅的充要条件是 $p \leqslant q$;

（3）$\{X_n\}$ 是鞅的充要条件是 $p=q$。

例 13·2．设 $\{\xi_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 为一串相互独立的随机变量（分布函数不必相同），令

$X_n=\sum_{k=0}^{n}\xi_k$，$n=0,1,2,\cdots$，则 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是鞅的充要条件是 $\mathbf{E}(\xi_k)=0$，（对一切 $k>0$）。

证。仿例 13·1. 因为

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)$$
$$=\mathbf{E}(\xi_{n+1})+X_n \quad (n\geqslant 0)$$

所以 $\{X_n\}$ 是鞅的充要条件是

$$\mathbf{E}(\xi_{n+1})=0 \quad (n\geqslant 0)$$

定理13·1. 设 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 是随机变量序列，$v_n=g_n(X_0, X_1, \cdots, X_{n-1})$，$|v_n|\leqslant K$，令

$$Y_0=X_0$$

$$Y_n=\sum_{k=1}^{n}v_k(X_k-X_{k-1})+X_0$$

（1）若 $\{X_n\}$ 是下鞅，$v_n\geqslant 0$，则

$$\mathbf{E}(Y_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\geqslant Y_n \quad (n\geqslant 0) \quad (13\cdot 1)$$

（2）若 $\{X_n\}$ 是上鞅，$v_n\geqslant 0$，则

$$\mathbf{E}(Y_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\leqslant Y_n \quad (n\geqslant 0) \quad (13\cdot 2)$$

（3）若 $\{X_n\}$ 是鞅，则

$$\mathbf{E}(Y_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)=Y_n \quad (n\geqslant 0) \quad (13\cdot 3)$$

证　显然 $\mathbf{E}(|Y_n|)<\infty$，$(n\geqslant 0)$。用 Y_n 的定义及§4条件期望性质9得

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(Y_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\\&=\mathbf{E}(Y_n+v_{n+1}(X_{n+1}-X_n)|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\\&=Y_n+\mathbf{E}(v_{n+1}(X_{n+1}-X_n)|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\\&=Y_n+v_{n+1}\mathbf{E}(X_{n+1}-X_n|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\end{aligned} \quad (13\cdot 4)$$

（1）若 $\{X_n\}$ 是下鞅，$\nu_n \geqslant 0$，（对一切 $n \geqslant 0$），则(13·4) 右方第二项$\geqslant 0$，故 (13·1) 成立。

（2）若 $\{X_n\}$ 是上鞅，$\nu_n \geqslant 0$，（对一切 $n \geqslant 0$），则(13·4) 右方第二项$\leqslant 0$，故 (13·2) 成立。

（3）若 $\{X_n\}$ 是鞅，则 (13·4) 右方第二项为 0，故 (13·3) 成立。

定理 13·1 得证。

定义13·2. 称定义在 (a, b) 上的实值函数 $f(x)$ 是凸函数，如果对任何 $x, y \in (a, b)$，$0 < \lambda < 1$，皆有：

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad (13 \cdot 5)$$

可以证明（下面诸命题都是纯分析的，在此不再证明了。有兴趣的读者可参看文献〔18〕）

（1）若 $f(x)$ 具有单调非降连续的导函数 $f'(x)$，则 $f(x)$ 是凸函数；

（2）$f(x) = |x|^p$，$(1 \leqslant p < \infty)$ 是凸函数；

（3）凸函数 $f(x)$ 是连续的；

（4）若 $f(x)$ 是凸函数，$X, X_1, \cdots, X_N$ 皆为随机变量，$\mathbf{E}(|X|) < \infty$，$\mathbf{E}(|f(X)|) < \infty$，则

(A) $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X))$；

(B) $f(\mathbf{E}(X | X_1, \cdots, X_N)) \leqslant \mathbf{E}(f(X) | X_1, \cdots, X_N)$。

(A)、(B) 两不等式，在概率论中被称为琴生 (Jensen) 不等式。

定理13·2. (1)若 $f(x)$ 为凸函数，$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为鞅，$\mathbf{E}(|f(X_n)|) < \infty$，$(n=0,1,2,\cdots)$，则

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1}) | X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0) \geqslant f(X_n) \qquad (n \geqslant 0) \qquad (13 \cdot 6)$$

（2）若 $f(x)$ 为单调非降的凸函数，$\{X_n, n=0, 1,$

2, …} 为下鞅, $\mathbf{E}(|f(X_n)|)<\infty$, $(n=0, 1, 2, \cdots)$ 则 (13·6) 也成立。

证（1）因为 $\{X_n\}$ 是鞅, 所以

$$f(X_n)=f(\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0))$$

而 $f(x)$ 是凸函数, 用琴生不等式得

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1})|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)$$
$$\geqslant f(\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0))=f(X_n)$$

（2）用琴生不等式, 并注意 $f(x)$ 单调非降凸函数及 $\{X_n\}$ 是下鞅可得

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1})|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)$$
$$\geqslant f(\mathbf{E}(X_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0))$$
$$\geqslant f(X_n)$$

系 1.（1）若 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 为鞅（或者非负下鞅）, $\mathbf{E}(|X_n|^p)<\infty$, $(n=0, 1, 2, \cdots)$, 则

$$\mathbf{E}(|X_{n+1}|^p|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\geqslant|X_n|^p$$
$$(n\geqslant 0, 1\leqslant p<\infty) \qquad (13\cdot 7)$$

（2）若 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 为下鞅, 令

$$X_n^+=X_n\vee 0=\begin{cases}0 & 当\ X_n\leqslant 0\\ X_n & 当\ X_n>0\end{cases}$$

则

$$\mathbf{E}(X_{n+1}^+|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\geqslant X_n^+ \quad (n\geqslant 0)$$
$$(13\cdot 8)$$

证（1）若 $\{X_n\}$ 是鞅, 由于 $f(x)=|x|^p$ 是凸函数, $(1\leqslant p<\infty)$, 所以由定理13·2得知（13·7）成立。

若 $\{X_n\}$ 是非负下鞅, 由于 $f(x)=x^p$ 是定义在 $(0,\infty)$ 上的非降凸函数, 所以, 仍用定理 13·2 亦可得（13·7）。（注意现在 $|X_n|^p=X_n^p$。）

（2）若 $\{X_n\}$ 为下鞅，令

$$f(x)=x^+=x\vee 0=\begin{cases}x & 当\ x>0\\ 0 & 当\ x\leqslant 0\end{cases}$$

则 $f(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的单调非降凸函数，再用定理13·2可得（13·8）。

定理 13·3.（鞅的极值不等式） 设 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$是鞅（或者非负下鞅），令

$$X_n^*=\sup_{0\leqslant k\leqslant n}|X_k| \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$X^*=\sup_{n\geqslant 0}X_n^*=\sup_{0\leqslant k<\infty}|X_k|$$

则

$$\lambda P(X^*>\lambda)\leqslant\sup_{n\geqslant 0}\mathbf{E}(|X_n|) \quad (对一切\ \lambda>0) \quad (13\cdot 9)$$

证.（甲）先设 $\{X_n\}$ 是非负下鞅。令

$A_0=\{X_0>\lambda\}$，$A_k=\{X_0\leqslant\lambda,\cdots,\ X_{k-1}\leqslant\lambda,\ X_k>\lambda\}$，$(k\geqslant 1)$，则 $\{A_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$ 两两不交。由于$\{X_n\}$是下鞅，所以由 §4 条件期望性质 6 可证：

$$\mathbf{E}(X_n|X_k,\ X_{k-1},\ \cdots,\ X_0)\geqslant X_k \quad (n\geqslant k\geqslant 0) \quad (13\cdot 10)$$

（(13·10) 的证明见习题13·1）。

而 A_k 完全由 X_k，X_{k-1}，…，X_0 所决定，因此，由定理4·3 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[I_{A_k}\mathbf{E}(X_n|X_k,\ X_{k-1},\ \cdots,\ X_0)]\\ &=\mathbf{E}(\mathbf{E}(I_{A_k}X_n|X_k,\ X_{k-1},\ \cdots,\ X_0))\\ &=\mathbf{E}(I_{A_k}X_n) \quad (n\geqslant k\geqslant 0)\end{aligned} \quad (13\cdot 11)$$

由（13·10）、(13·11) 得

$$\mathbf{E}(I_{A_k}X_k)\leqslant\mathbf{E}(I_{A_k}X_n) \quad (n\geqslant k\geqslant 0) \quad (13\cdot 12)$$

所以由$A_k \subset \{X_k > \lambda\}$ 及（13·12）得

$$\lambda P(X_n^* > \lambda) = \lambda P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}(\lambda I_{A_k}) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}(X_k I_{A_k})$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}(X_n I_{A_k}) = \mathbf{E}(X_n I_{\bigcup_{k=0}^{n} A_k})$$

$$\leqslant \mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(|X_n|) \leqslant \sup_{n \geqslant 0} \mathbf{E}(|X_n|) \qquad (13·13)$$

在（13·13）中令$n \to \infty$得

$$\lambda P(X^* > \lambda) = \lambda P(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) \leqslant \sup_{n \geqslant 0} \mathbf{E}(|X_n|)$$

（2）若 $\{X_n\}$ 是鞅，则由定理 13·2 系 1 得知

$$\mathbf{E}(|X_{n+1}| \mid X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0) \geqslant |X_n|$$

由此及习题 13·1 仍有

$$\mathbf{E}(|X_n| \mid X_k, X_{k-1}, \cdots, X_0) \geqslant |X_k| \quad (n \geqslant k \geqslant 0) \qquad (13·14)$$

令

$$\bar{A}_0=\{|X_0|>\lambda\}$$

$$\bar{A}_k=\{|X_0|\leqslant\lambda,\ \cdots,\ |X_{k-1}|\leqslant\lambda,\ |X_k|>\lambda\}\quad k\geqslant 1$$

仿（甲），仍可证

$$\lambda P(X^*>\lambda)=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}P(\bar{A}_k)$$

$$\leqslant\sup_{n\geqslant 0}\ \mathbf{E}(|X_n|)$$

定理 13·3 得证。

定理13·4.（上穿不等式）设a，b为二固定实数，$a<b$，$x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots)$ 为无穷维向量，每个分量皆为实数。令

$$u_0(x)=u_0(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots)\equiv 1\quad（对一切\ x）$$

$$u_{n+1}(x)=u_{n+1}(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots)$$

$$=\begin{cases}1 & 若\ x_n>b\\ u_n(x) & 若\ x_n\in[a,\ b]\\ 0 & 若\ x_n<a\end{cases}\quad (n\geqslant 0)\tag{13·15}$$

再令 $g_n^{[a,b]}(x)$ 是“上穿函数”，即是

$$g_n^{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & 当\ x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\ 在时刻n上穿[a,b]\\ 0 & 反之\end{cases}\tag{13·16}$$

所谓 $x=(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots)$ 在时刻 n 上穿$[a,\ b]$，或者简称x_n上穿 $[a,\ b]$，意即

“$x_n>b$，且存在 $m>0$，使 $x_{n-m}<a$，而 $x_k\in[a,b]$（对一切 $n>k>n-m$）”。

显然 $g_0^{[a,b]}(x)\equiv 0$，（对一切 x）。

再令

$$U_n^{[a,b]}(x)=\sum_{k=0}^{n} g_k^{[a,b]}(x)=\sum_{k=1}^{n} g_k^{[a,b]}(x) \qquad (13\cdot17)$$

为 $x=(x_0, x_1, x_2, \cdots)$ 到时刻 n 为止上穿 $[a,b]$ 的总次数，亦即为 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 上穿 $[a,b]$ 的总次数。则有

$$(b-a)U_n^{[a,b]}(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)(u_{k+1}(x)-u_k(x))$$

$$(n\geqslant1) \qquad (13\cdot18)$$

证。由（13·15）、（13·16）得知

"$g_k^{[a,b]}(x)=1$

$\Rightarrow x_k>b$，且存在 $m>0$，使 $x_{k-m}<a$，而 $x_j\in[a,b]$，$(k>j>k-m)$

$\Rightarrow u_{k+1}(x)=1$，$u_k(x)=u_{k-1}(x)=\cdots=u_{k-m+1}(x)=0$

$\Rightarrow u_{k+1}(x)-u_k(x)=1$"

所以若令

$$\xi^+=\begin{cases}\xi & 当\ \xi>0\\ 0 & 当\ \xi\leqslant0\end{cases}$$

则由 $U_n^{[a,b]}(x)$ 的定义得

$$U_n^{[a,b]}(x)\leqslant\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}(x)-u_k(x))^+ \qquad (13\cdot19)$$

但是，由 $u_k(x)$ 的定义有

$$u_{k+1}(x)-u_k(x)>0 \Rightarrow x_k>b$$
$$u_{k+1}(x)-u_k(x)<0 \Rightarrow x_k<a$$

所以

$$(b-a)(u_{k+1}(x)-u_k(x))^+\leqslant(x_k-a)(u_{k+1}(x)-u_k(x)),$$

以此不等式代入（13·19）即得（13·18）。

定理13·5.（下鞅的上穿不等式）

设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 为下鞅，记 $X=(X_0, X_1, X_2, \cdots)$，定义 $u_k(X)$，$g_n^{[a,b]}(X)$，$U_n^{[a,b]}(X)$ 如定理 13·4，再令

$$U^{[a,b]}(X)=\lim_{n\to\infty}U_n^{[a,b]}(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} g_k^{[a,b]}(X)$$

是X上穿 $[a,b]$ 的总次数。（注意：在定理13·4中，$u_k(x)$、$g_n^{[a,b]}(x)$、$U_n^{[a,b]}(x)$ 是普通的实值函数，而定理 13·5 中的 $u_k(X)$、$g_n^{[a,b]}(X)$、$U_n^{[a,b]}(X)$ 是随机变量。）则有

$$\mathbf{E}(U_n^{[a,b]}(X))\leqslant\frac{\mathbf{E}(|X_n|)+|a|}{b-a} \tag{13·20}$$

$$\mathbf{E}(U^{[a,b]}(X))\leqslant\frac{\sup\limits_{n\geqslant 0}\mathbf{E}(|X_n|)+|a|}{b-a} \tag{13·21}$$

证。由 $u_k(X)$ 的定义得知，它仅依赖于 $X_0, X_1, \cdots, X_{k-1}$。因此，由 $\{X_n\}$ 是下鞅及条件期望的性质 9 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(u_k(X)(X_k-a))\\
&=\mathbf{E}(\mathbf{E}(u_k(X)(X_k-a)|X_{k-1}, X_{k-2}, \cdots, X_0))\\
&=\mathbf{E}(u_k(X)\mathbf{E}(X_k-a|X_{k-1}, X_{k-2}, \cdots, X_0))\\
&\geqslant\mathbf{E}(u_k(X)(X_{k-1}-a)) \qquad (k\geqslant 1)
\end{aligned} \tag{13·22}$$

再用定理 13·4 及（13·22）式得

$$(b-a)\mathbf{E}(U_n^{[a,b]}(X))$$

$$\leqslant \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-a)(u_{k+1}(X)-u_k(X))\right)$$

$$\leqslant \mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n}\Big[(X_k-a)u_{k+1}(X)-(X_{k-1}-a)u_k(X)\Big]\right)$$

$$=\mathbf{E}((X_n-a)u_{n+1}(X)-(X_0-a)u_1(X)) \qquad (13\cdot23)$$

但是

$$u_1(X)\geqslant 0$$

而且

$$\text{“}u_1(X)=0\Leftrightarrow X_0<a\text{”}$$

所以由（13·23）得

$$(b-a)\mathbf{E}(U_n^{[a,b]}(X))$$
$$\leqslant \mathbf{E}((X_n-a)u_{n+1}(X)) \qquad (13\cdot24)$$

再注意 $|u_{n+1}(X)|\leqslant 1$，则由（13·24）即得（13·20）由（13·20）立即可得（13·21）。定理证毕。

定理13·6．（收敛定理）设$\{X_n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$为上鞅或者下鞅，$\sup\limits_{n\geqslant 0}\mathbf{E}(|X_n|)<\infty$，则存在随机变量$X_\infty$，使$\mathbf{E}(|X_\infty|)\leqslant\sup\limits_{n\geqslant 0}\mathbf{E}(|X_n|)$，且

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty \qquad [a.e.] \qquad (13\cdot25)$$

亦即

$$P(\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty)=1$$

证。设$\{X_n\}$是下鞅，令$U^{[a,b]}(X)$的定义如定理13·5。则由定理13·5有

$$\mathbf{E}(U^{[a,b]}(X)) \leqslant \frac{\sup\limits_{n>0}\mathbf{E}(|X_n|)+|a|}{b-a}<\infty \tag{13·26}$$

从而

$$0=P(U^{[a,b]}(X)=\infty) \geqslant P(\liminf_{n\to\infty}X_n<a<b<\limsup_{n\to\infty}X_n) \tag{13·27}$$

令 Q 为全体有理数，则

$$\{\lim_{n\to\infty}X_n \text{ 不存在}\} \subset\{\liminf_{n\to\infty} X_n<\limsup_{n\to\infty} X_n\} \subset \bigcup_{\substack{a<b\\ a,b\in Q}} \{\liminf_{n\to\infty}<a<b<\limsup_{n\to\infty}X_n\} \tag{13·28}$$

由（13·27）、（13·28）得

$$P(\lim_{n\to\infty}X_n \text{ 不存在})=0$$

亦即存在一个随机变量 X_∞，使

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty \quad [a.e.]$$

而用法都（Fatou）引理可得

$$\mathbf{E}(|X_\infty|)=\mathbf{E}(\lim_{n\to\infty}|X_n|) \leqslant\liminf_{n\to\infty}\mathbf{E}(|X_n|) \leqslant\sup_{n>0} \mathbf{E}(|X_n|)$$

定理证毕。

下面我们再介绍有关鞅的几个不等式

定理 13·7. 柯氏(Колмогоров) 不等式。设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一个鞅，$X_n^*=\sup\limits_{0\leqslant k\leqslant n}|X_k|$，$X^*=\sup\limits_{n\geqslant 0}|X_n|$，则

$$(1)\ \lambda^2 P(X_n^*>\lambda)\leqslant \mathbf{E}(X_n^2) \quad (n\geqslant 0,\ \lambda>0) \tag{13·29}$$

$$(2)\ \lambda^2 P(X^*>\lambda)\leqslant \sup_{n\geqslant 0}\mathbf{E}(X_n^2) \quad (\lambda>0) \tag{13·30}$$

定理13·8. 杜勃(Doob) 不等式。设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一个鞅（或者非负下鞅），$X_n^*=\sup\limits_{0\leqslant k\leqslant n}|X_k|$，$X^*=\sup\limits_{n\geqslant 0}|X_n|$，则

$$(1)\ \mathbf{E}(X^*)\leqslant\frac{e}{e-1}\left[1+\sup_{n\geqslant 0}\mathbf{E}(|X_n|\log^+|X_n|)\right]$$

$$\left(\text{其中}\ \log^+x=\begin{cases}0 & \text{当}\ \log x\leqslant 0\\ \log x & \text{当}\ \log x>0\end{cases}\right) \tag{13·31}$$

$$(2)\ \left[\mathbf{E}\left([X^*]^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant\sup_{n\geqslant 0}\left[\mathbf{E}(|X_n|^p)\right]^{\frac{1}{p}}\cdot q$$

$$\left(\text{其中}\ p>1,\ q>1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right) \tag{13·32}$$

最后我们再介绍一个上鞅的分解定理。

定理13·9. 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 为上鞅，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}(X_n)>-\infty$，则存在随机过程 $\{Y_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 和 $\{Z_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$，使

$$X_n=Y_n+Z_n \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{13·33}$$

其中 $\{Y_n\}$ 满足 $\mathbf{E}(|Y_n|)<\infty$及

$$\mathbf{E}(Y_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)=Y_n \quad (n\geqslant 0)$$

而 $\{Z_n\}$ 满足 $\mathbf{E}(Z_n)<\infty$, $Z_n\geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}(Z_n)=0$ 及

$$\mathbf{E}(Z_{n+1}|X_n, X_{n-1}, \cdots, X_0)\leqslant Z_n \quad (n\geqslant 0)$$

而且满足上述条件的 $\{Y_n\}$ 和 $\{Z_n\}$ 是唯一（零概率事件忽略不计）决定的。

习　　题

13·1. 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是下鞅，试证

$$\mathbf{E}(X_n|X_k, X_{k-1}, \cdots, X_0)\geqslant X_k \quad (n\geqslant k\geqslant 0)$$

13·2. 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是上鞅，试证 $\{-X_n, n=0, 1, 2\cdots\}$ 是下鞅，从而由习题13·1有

$$\mathbf{E}(X_n|X_k, X_{k-1}, \cdots, X_0)\leqslant X_k \quad (n\geqslant k\geqslant 0)$$

因此 $\mathbf{E}(X_n)$ 是 n 的单调下降函数。

13·3. 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是鞅，试利用习题13·1 和 13·2 证明

$$\mathbf{E}(X_n|X_k, X_{k-1}, \cdots, X_0)=X_k \quad (n\geqslant k\geqslant 0)$$

从而

$$\mathbf{E}(X_n)\equiv C \quad (C\text{不依赖于}n)。$$

13·4. 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$ 是一个对称的贝努利随机徘徊。$X_0\equiv 0$，令 $X_n^*=\sup\limits_{n\geqslant k\geqslant 0}|X_k|$，试证对任何 $\lambda>0$，总有

$$P(X_n^*>\lambda)\leqslant\frac{n}{\lambda} \quad (n\geqslant 1)$$

13·5. 设 $\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$, X_n^* 之定义如习

题13·4。试证对任何 $n\geqslant 0$，$\lambda>0$，皆有

$$P(X_n^*>\lambda)\leqslant\frac{n}{\lambda^2}$$

参　考　文　献

〔1〕胡迪鹤，可数状态的马尔可夫过程论，武汉大学出版社，1983。

〔2〕胡迪鹤，分析概率论，科学出版社，1984。

〔3〕Parzen, E., Stochastic Processes, Holden-Day, Inc., 1962。

〔4〕胡迪鹤，随机过程概论，武汉大学出版社，(待出)。

〔5〕李致中，应用数学，中国铁道出版社，1981。

〔6〕Ash, R.B., Topics in Stochastic Processes, Academic Press, 1975。

〔7〕徐光辉，随机服务系统，科学出版社，1980。

〔8〕严士健、王隽骧，刘秀芳，概率论基础，科学出版社，1982。

〔9〕Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, (Vol.1), New York, 1957. (有中译本，第一分册，胡迪鹤，林向清译，第二分册，刘文译，概率论及其应用，科学出版社。)

〔10〕Halmos, P. R., Measure Theory, Von Nostrand, 1950.(有中译本，王建华译，测度论，科学出版社。)

〔11〕Хинчин, А. Я., Математические Методы Теории Массового Обслуживания, Изд. АН СССР, 1955。(有中译本，张里千，殷涌泉译，公用事业理论的数学方法，科学出版社。)

〔12〕王梓坤，生灭过程与马尔科夫链，科学出版社，1980。
〔13〕侯振挺、郭青峰，齐次可列马尔可夫过程，科学出版社，1978。
〔14〕复旦大学编，概率论（第一分册），人民教育出版社，1979。
〔15〕Spitzer, F.L., Principles of Random Walk, Princeton, Van Nostrand, 1964。
〔16〕Chung, K. L., Elementary Probability Theory With Stochastic Processes, Springer-Verlag, (Third Edition), 1979。
〔17〕Kemeny, J. G., Snell, J. L., Knapp, A. W., Denumerable Markov Chains, Springer-Verlag, (Second Edition), 1976。
〔18〕Rockafeller, R. T., Convex Analysis, Princeton University Press, 1972。

[General Information]
书名=应用随机过程引论
作者=胡迪鹤
页数=327
SS号=10184612
DX号=
出版日期=1984年12月第1版
出版社=哈尔滨工业大学出版社